

УДК 004.94+УДК 532.135

*Кузяєв І.М., Митрохін О.А., Казіміров І.П.***МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОХОЛОДЖЕННЯ ТРУБНИХ ЗАГОТОВОК ІЗ ПОЛІМЕРІВ**

ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», м. Дніпро, Україна

Виготовленню полімерних труб присвячено багато наукових праць. При цьому такому процесу, як охолодження кінцевого продукту після екструзії, приділено небагато уваги. Охолодження полімерних трубних заготовок, як і більшість процесів переробки пластмас, відноситься до неізотермічних процесів, тобто необхідно розв'язувати теплову задачу. Від точного розрахунку теплового балансу дуже залежить кінцевий результат екструзійного процесу. У даній роботі розроблено математичну модель процесів охолодження трубних заготовок із полімерів, які одержано методом екструзії. Створено декілька математичних моделей теплових процесів для теплоенергетичного обладнання. При цьому запропоновано різні розрахункові схеми, методи та рівняння для їх розв'язку. Математичну модель для відображення процесів охолодження полімерних трубних заготовок після їх екструзії можна вважати розширенням цих досліджень. У ході побудови математичної моделі використано циліндричну систему координат у припущенні симетричності вздовж кутової координати. При цьому в початковій постановці розглядався нестационарний процес. Надалі, використовуючи заміну незалежної змінної за часом через незалежну змінну за осьовою координатою та осьовою швидкістю руху, виконано перехід до диференційного рівняння в частинних похідних уздовж двох лінійних координат. Розв'язок даного рівняння знайдено за допомогою операційного методу (методом інтегрального перетворення Лапласа). Остаточний розв'язок поставленої задачі (після прямого й зворотного перетворення Лапласа) отримано через функції Бесселя на базі пакету MathCAD з використанням низки вбудованих у даний пакет функцій та обчислювальних блоків. Таким чином, у даній роботі розроблено математичну модель для моделювання та оптимізації процесів охолодження трубних заготовок із полімерних матеріалів. На базі розробленої математичної моделі побудовано програмний блок MathCAD для реалізації даної моделі. Надано результати розрахунків у вигляді графіків, які дозволяють характеризувати адекватність представлених матеріалів.

**Ключові слова:** математична модель, рівняння балансу, перетворення Лапласа, програмний блок.

DOI: 10.32434/2521-6406-2020-8-2-24-33

**Постановка проблеми**

У хімічній промисловості при моделюванні процесів і оптимізації параметрів об'єктів доводиться стикатися з неізотермічними процесами, тобто необхідно розв'язувати теплову задачу, для чого в загальному випадку слід скористатися рівнянням теплового балансу. У векторному вигляді, тобто незалежно від системи координат, в якій розглядається конкретний процес, рівняння теплового балансу можна подати таким

чином [1–5]:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \vec{q}) + \left( \vec{\sigma}; \nabla \vec{V} \right), \quad (1)$$

де  $C_p$  – коефіцієнт теплоємності матеріалу при постійному тиску;  $\vec{q}$  – вектор теплового потоку;  $T$  – температура;  $\nabla \vec{V}$  – градієнт вектора  $\vec{V}$ ;

$\partial T / \partial t$  – субстанціональна похідна від температури;  $(\nabla \cdot \vec{q})$  – скалярний добуток вектора  $\nabla$  на вектор  $\vec{q}$ .

Другий доданок у правій частині рівняння (1) являє собою тензорний запис, що з фізичної точки зору являє собою швидкість необерненого руху внутрішньої енергії одиниці елементарного об'єму за рахунок в'язкої дисипації. Цей доданок іноді називають функцією дисипації. Якщо значних деформацій в елементах, що розглядаються, немає, то цією величиною можна нехтувати.

Для циліндричної системи координат рівняння (1), у разі нехтування функцією дисипації, приймає вигляд:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{q_r}{r} \right). \quad (2)$$

Для проекції вектора теплового потоку  $q_i$  у більшості випадків є справедливим закон Фур'є, який можна надати у вигляді:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності перероблюваного матеріалу.

При моделюванні теплових задач для більшості реальних технічних задач має місце симетричність відносно кутової координати, що дає можливість нехтувати похідними вздовж кутової координати.

Для розв'язання рівняння (2) з урахуванням співвідношення (3) необхідно мати дві межові умови щодо осі  $r$  й одну початкову умову для часу  $t$ .

Існують три основних типи межових температурних умов:

– межова умова першого роду: це коли на поверхні елемента, що розглядається, задається температура  $T_w$ :

$$T = T_w \text{ при } y = d \text{ (або } y = 0), \quad (4)$$

де  $\delta$  – характеристичний геометричний розмір (для циліндричної системи координат він у більшості випадків записується через один із радіусів);

– межова умова другого роду: це коли на поверхні елемента, що розглядається, задається тепловий потік  $q$ :

$$\pm \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q_w \text{ при } y = \delta \text{ (або } y = 0); \quad (5)$$

– межова умова третього роду: це коли поверхня елемента має конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем:

$$\pm \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_T (T_c - T) \text{ при } y = \delta \text{ (або } y = 0), \quad (6)$$

де  $T_c$  – температура зовнішнього середовища;  $\alpha_T$  – коефіцієнт тепловіддачі,  $[W/(m^2 \cdot K)]$ .

Знаки плюс і мінус відповідають напрямку осі координат і вектора теплового потоку. Якщо напрямки співпадають, то буде плюс, в іншому випадку буде мінус.

Окрім межових умов (4)–(6) треба також враховувати початкові умови за часом. Якщо припустити, що у початковий момент часу тіло мало постійну температуру  $T_p$ , то початкову умову можна записати так:

$$T(y, t) = T_p \text{ при } t = 0. \quad (7)$$

Існує ще й межова умова четвертого роду, що відповідає теплообміну поверхні тіла з навколишнім середовищем (конвективний теплообмін тіла з рідиною) або теплообміну стикових твердих тіл, коли температура стикових поверхонь однакова. При обтіканні твердого тіла потоком рідини передача тепла від рідини до поверхні тіла в безпосередній близькості до поверхні тіла (ламінальний прикордонний шар або ламінальний підшар) відбувається за законом теплопровідності (молекулярне перенесення тепла), тобто має місце теплообмін, що відповідає межовій умові четвертого роду

$$T_{II}(t) = [T_c(t)]_{II}. \quad (8)$$

Крім рівності температур, має місце також рівність потоків тепла

$$-\lambda_c \left( \frac{\partial T_c}{\partial n} \right)_{II} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{II}. \quad (9)$$

Таким чином, при конвективному теплообміні твердого тіла з рідиною у випадку стаціонарного температурного поля ( $\partial T / \partial t = 0$ ) можна використати межові умови третього роду, а саме:

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Pi} = \alpha [T_{\Pi}(t) - T_c(t)]. \quad (10)$$

Якщо скористатися залежністю часу від осової координати у вигляді  $t=z/V_z$  (де  $V_z$  – швидкість руху труби), то рівняння (2) може бути переписано таким чином:

$$\rho_m C_{pm} V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_m \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (11)$$

При цьому початкова умова запишеться так:

$$T(y, z) = T_p \text{ при } z=0. \quad (12)$$

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [6] розроблено математичну модель для процесів охолодження полімерних гранул. При цьому дану модель можна використовувати як при холодному гранулюванні, так і за методом гарячого одержання гранул. Остаточню для визначення температурного поля  $T(r, t)$  в процесі охолодженні джгута (при холодному гранулюванні) або одразу гранули (при гарячому гранулюванні) у даній роботі одержано рівняння в такому вигляді:

$$T(r, t) = T_n + \frac{8\alpha_c R}{\lambda_c} [T_R(t) - T_C] \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0 \left( P_k \frac{r}{R} \right)}{P_k^3 [J_1(P_k) + J_3(P_k)]} \times \left[ \exp \left( -a_m \frac{P_k^2}{R^2} t \right) + a_m \frac{P_k^2}{R^2} t - 1 \right], \quad (13)$$

де  $R$  – зовнішній радіус циліндру (циліндр виконано без внутрішньої порожнини);  $T_n$  – початкова температура в об'ємі гранули;  $a_m$  – коефіцієнт теплопровідності для матеріалу гранули;  $\lambda_c$ ,  $\alpha_c$  – коефіцієнти, відповідно, теплопровідності та тепловіддачі охолодного середовища;  $T_c$  – температура охолодного середовища;  $J_0$ ,  $J_1$ ,  $J_3$  – функції Бесселя першого роду відповідно нульового, першого і третього порядку;  $P_k$  – нулі для функції Бесселя  $J_0$ .

У роботі [7] розроблено математичну модель для зони дозування одночерв'ячного екст-

рудера у вигляді тришарової схеми, де внутрішній шар являє собою осердя черв'яка, а зовнішній шар – корпус екструдера; між ними розташовано перероблюваний полімерний матеріал (схему подано на рис. 1).

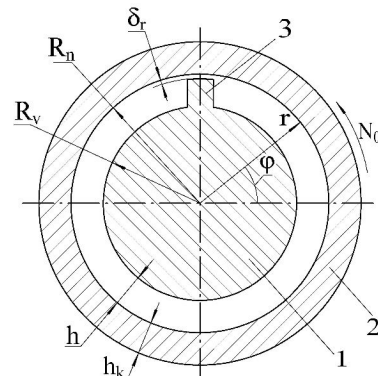


Рис. 1. Розрахункова схема для моделювання процесів у робочих обсягах черв'ячних машин з урахуванням кривизни гвинтового каналу

Розв'язок для даної задачі одержано у вигляді такої системи:

$$T_m(z, r) = T_n + \frac{F_{dis} \alpha_m}{\lambda_m V_z} z + K_\alpha (T_{Hk} - T_{Ok}) 2R_v \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{P_k^2} \frac{A(s_k)}{dB(s_k)} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{a_m}{V_z} \cdot \left( \frac{P_k}{R_v} \right)^2 z \right] \right\}, \quad (14)$$

де

$$A(s_k) = J_0 \left( P_k \frac{r}{R_v} \right) Y_1(P_k) - Y_0 \left( P_k \frac{r}{R_v} \right) J_1(P_k);$$

$$dB(s_k) = \left[ J_0(P_k) - \frac{1}{P_k} J_1(P_k) \right] Y_1 \left( P_k \frac{R_n}{R_v} \right) \times \left[ Y_0 \left( P_k \frac{R_n}{R_v} \right) - \frac{R_v}{R_n P_k} Y_1 \left( P_k \frac{R_n}{R_v} \right) \right] \frac{R_n}{R_v} \cdot J_1(P_k) - \left[ Y_0(P_k) - \frac{1}{P_k} Y_1(P_k) \right] J_1 \left( P_k \frac{R_n}{R_v} \right) \times \left[ J_0 \left( P_k \frac{R_n}{R_v} \right) - \frac{R_v}{R_n P_k} J_1 \left( P_k \frac{R_n}{R_v} \right) \right] \frac{R_n}{R_v} Y_1(P_k).$$

Тут  $T_{\text{Hk}}$ ,  $T_{\text{ok}}$  – температури, відповідно, зовнішньої поверхні корпусу і охолодного середовища. Слід зазначити, що рівняння (14) при його розв’язанні може мати в загальному випадку три невідомих, а саме: температуру  $T_{\text{Hk}}$ , температуру на поверхні осердя черв’яка  $T_m(z, R_v)$  і температуру на внутрішній поверхні матеріального циліндра  $T_m(z, R_n)$ , яка відповідає температурі  $T_{\text{Bk}}$ . Щоб знайти значення цих температур на кожному кроці вздовж координати  $z$  необхідно розв’язати таку систему рівнянь:

$$T_{\text{Hk}} = T_m(z, R_n) - \frac{\alpha_{\text{ok}}(T_{\text{Hk}} - T_{\text{ok}})}{\lambda_k} (R_n - h_k) \ln\left(\frac{R_n + h_k}{R_n}\right); \quad (15)$$

$$T_m(z, R_n) = T_n + \frac{F_{\text{dis}} a_m}{\lambda_k V_z} z + K_\alpha (T_{\text{Hk}} - T_{\text{ok}}) 2R_v \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{P_k^2} \cdot \frac{A(s_k)|_{r=R_n}}{dB(s_k)} \left\{ 1 - \exp\left[ -\frac{a_m}{V_z} \left(\frac{P_k}{R_v}\right)^2 z \right] \right\}; \quad (16)$$

$$T_m(z, R_v) = T_n + \frac{F_{\text{dis}} a_m}{\lambda_k V_z} z + K_\alpha (T_{\text{Hk}} - T_{\text{ok}}) 2R_v \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{P_k^2} \cdot \frac{A(s_k)|_{r=R_v}}{dB(s_k)} \left\{ 1 - \exp\left[ -\frac{a_m}{V_z} \left(\frac{P_k}{R_n}\right)^2 z \right] \right\}, \quad (17)$$

де  $\alpha_{\text{ok}}$  – коефіцієнт тепловіддачі між охолодним середовищем і зовнішньою поверхнею корпусу;  $F_{\text{dis}}$  – функція дисипації, яка визначається із виразу

$$F_{\text{dis}} = \sigma_{r\phi} \left( \frac{dV_\phi}{dr} + \frac{V_\phi}{r} \right) + \sigma_{rz} \frac{dV_z}{dr},$$

де  $V_\phi$ ,  $V_z$  – компоненти вектора швидкості руху;  $\sigma_{r\phi}$ ,  $\sigma_{rz}$  – компоненти тензора напружень.

В роботах [6,7] для отримання функціональних залежностей з метою моделювання температури в досліджуваних об’єктах використано інтегральне перетворення, при цьому в якості межових умов обрано температурні межі умови третього роду, тобто конвективний теплообмін.

Серед інших робіт можна також виділити статті [8–10]. Крім аналітичного одержання рівнянь за допомогою інтегрального перетворення Лапласа, теплові процеси можна моделювати також за допомогою одного із пакетів прикладних програм, наприклад, Solid Works [11,12].

### Формулювання мети статті

Основна мета даної статті полягає в роботі математичної моделі для аналізу температурного поля при охолодженні полімерних трубних заготовок на екструзійних лініях, що дозволить оптимізувати не тільки технологічні параметри, а й конструктивні характеристики лінії.

### Виклад основного матеріалу дослідження

Для моделювання температурних полів при охолодженні труб розрахункову схему можна подати згідно з рис. 2, тобто температурний процес буде розглядатися в циліндричній системі координат.

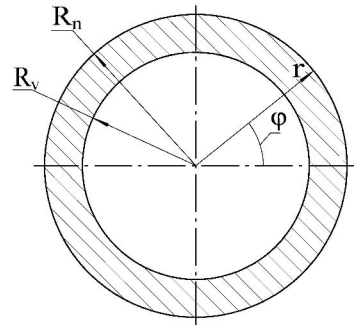


Рис. 2. Розрахункова схема для моделювання температурних процесів при охолодженні труб

Якщо враховувати симетричність розподілу температури вздовж кутової координати, а також прийняти умову стаціонарності процесу, то рівняння теплового балансу може бути надано в такий спосіб:

$$\rho_m C_{\text{pm}} V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_m \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (18)$$

де  $V_z$  – швидкість руху труби;  $\rho_m$  – густина перероблюваного матеріалу;  $C_{\text{pm}}$ ,  $\lambda_m$  – відповідно коефіцієнти теплоємності й теплопровідності полімерного матеріалу.

З огляду на те, що геометричні розміри труби в напрямку осі  $r$  набагато менші, ніж у напрямку осі  $z$  (вісь  $z$  спрямовано вздовж осі труби), то останнє рівняння можливо спростити до такого вигляду:

$$\rho_m C_{pm} V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_m \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right). \quad (19)$$

Для розв'язання рівняння (19) скористаємося за радіусом межовими умовами першого роду, а саме:

$$\left. \begin{aligned} T &= T_n \quad \text{при} \quad r = R_n; \\ T &= T_v \quad \text{при} \quad r = R_v, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

де  $T_n$  – температура зовнішньої поверхні труби;  $T_v$  – температура внутрішньої поверхні труби.

Початкову умову за координатою  $z$  подамо в такому вигляді:

$$T = T_p \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (21)$$

При розв'язанні рівняння (19) використаємо інтегральне перетворення Лапласа за координатою  $z$  [11, 12]. Тоді операторний аналог запишеться так:

$$\rho_m C_{pm} V_z (sT^L - T_p) = \lambda_m \left( \frac{d^2 T^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT^L}{dr} \right),$$

де  $T^L$  – зображення температури  $T$ ;  $s$  – змінна Лапласа.

Перепишемо останнє рівняння у вигляді:

$$\frac{d^2 T^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT^L}{dr} - \frac{s}{a_z} T^L = -\frac{T_p}{a_z}, \quad (22)$$

де  $a_z = \rho_m C_{pm} V_z / \lambda_m$ .

Розв'язок рівняння (22) має вигляд [13–15]:

$$T^L = \frac{T_p}{s} + C_1 J_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} ir \right) + C_2 Y_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} ir \right), \quad (23)$$

де  $J_0$ ,  $Y_0$  – функції Бесселя відповідно першого і другого роду нульового порядку;  $i$  – уявна одиниця;  $C_1$ ,  $C_2$  – сталі інтегрування.

Операторний аналог межових умов (20) запишеться так:

$$\left. \begin{aligned} T^L &= \frac{T_n}{s} \quad \text{при} \quad r = R_n; \\ T^L &= \frac{T_v}{s} \quad \text{при} \quad r = R_v. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Підставивши межові умови (24) у рівняння (23) і визначивши сталі інтегрування, одержимо рівняння для температури в зображеннях:

$$T^L = \frac{T_p}{s} + \frac{T_n - T_p}{s} \cdot \frac{A1(s, r)}{B(s)} + \frac{T_v - T_p}{s} \cdot \frac{A2(s, r)}{B(s)}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{де } B(s) &= J_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} iR_n \right) Y_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} iR_v \right) - \\ &- J_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} iR_v \right) Y_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} iR_n \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1(s, r) &= J_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} iR_n \right) Y_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} ir \right) - \\ &- Y_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} iR_n \right) J_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} ir \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A2(s, r) &= Y_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} iR_v \right) J_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} ir \right) - \\ &- J_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} iR_v \right) Y_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} ir \right). \end{aligned}$$

Щоб перейти до оригіналу виразу, треба знайти оригінали кожного з членів у його правій частині. Для першого члену перехід від зображення до оригіналу здійснюється досить просто, а саме:

$$\frac{T_p}{s} \rightarrow T_p. \quad (26)$$

Оригінали для другого і третього членів

можна одержати, якщо на першому етапі використати другу теорему розкладання [12] у вигляді:

$$\frac{A(s, r)}{B(s)} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(s_k, r)}{B'(s_k)} \exp(s_k z), \quad (27)$$

$$\text{де } B'(s_k) = \left. \frac{dB(s)}{ds} \right|_{s=s_k}.$$

На другому етапі слід скористатися теоремою про інтегрування оригіналу, а саме:

$$\int_j^z \sum_k \frac{A(s_k, r)}{B'(s_k)} \exp(s_k \zeta) d\zeta. \quad (28)$$

У виразах (27) і (28) величина  $A(s, r)$  для другого члена відповідає  $A1(s, r)$ , а для третього, відповідно –  $A2(s, r)$ . При цьому  $s_k$  позначає полюси для  $B(s_k)$ , які в цьому випадку можна виразити так:

$$s_k = -a_z \left( -\frac{P_k}{R_{cp}} \right)^2, \quad (29)$$

де  $R_{cp}$  – середній радіус ( $R_{cp} = (R_n + R_v)/2$ );  $P_k$  – нулі для комплексу  $B(s_k)$  при підстановці в нього полюсів (29).

Остаточню для розподілу температурного поля в трубній заготовці можна записати наступний вираз:

$$\begin{aligned} T(r, z) = & T_p - \\ & -2R_{cp} (T_n - T_p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A1_k(r)}{P_k KJY_k} [1 - \exp(-s_k z)] - \\ & -2R_{cp} (T_v - T_p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A2_k(r)}{P_k KJY_k} [1 - \exp(-s_k z)], \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } A1_k(r) = & J_0 \left( P_k \frac{R_n}{R_{cp}} \right) Y_0 \left( P_k \frac{r}{R_{cp}} \right) - \\ & - Y_0 \left( P_k \frac{R_n}{R_{cp}} \right) J_0 \left( P_k \frac{r}{R_{cp}} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A2_k(r) = & Y_0 \left( P_k \frac{R_v}{R_{cp}} \right) J_0 \left( P_k \frac{r}{R_{cp}} \right) - \\ & - J_0 \left( P_k \frac{R_v}{R_{cp}} \right) Y_0 \left( P_k \frac{r}{R_{cp}} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} KJY_k = & -J_1 \left( P_k \frac{R_n}{R_{cp}} \right) Y_0 \left( P_k \frac{R_v}{R_{cp}} \right) R_n - \\ & - J_0 \left( P_k \frac{R_n}{R_{cp}} \right) Y_1 \left( P_k \frac{R_v}{R_{cp}} \right) R_v + \\ & + J_1 \left( P_k \frac{R_v}{R_{cp}} \right) Y_0 \left( P_k \frac{R_n}{R_{cp}} \right) R_v + \\ & + J_0 \left( P_k \frac{R_v}{R_{cp}} \right) Y_1 \left( P_k \frac{R_n}{R_{cp}} \right) R_n. \end{aligned}$$

Приклад використання розрахункових залежностей, отриманих за розробленою математичною моделлю, наведено в програмному блоці, побудовано на базі математичного пакету MathCAD версії 11 (рис. 3).

На рис. 4 представлено графік визначення нулів функції  $JY_0(x)$ .

За результатами обчислень побудовано тривимірний графік для розподілення температури при охолодженні трубних заготовок із полімерів (рис. 5).

#### Висновки

У даній роботі розроблено математичну модель для моделювання та оптимізації процесів охолодження трубних заготовок із полімерних матеріалів. На базі розробленої математичної моделі побудовано програмний блок MathCAD для реалізації даної моделі. Наведено результати розрахунків у вигляді графіків, які дозволяють характеризувати адекватність наданих матеріалів.

$x := (50.8 \ 101.6 \ 150.3 \ 253.9 \ 304.7 \ 355.5 \ 406.3 \ 457.1 \ 507.9 \ 609.5 \ 660.2 \ 711.0)^T$

$P := \begin{cases} i \leftarrow 0 \\ \text{for } xp \in x \\ \quad \begin{cases} xt \leftarrow \text{root}(JY_0(xp), xp) \\ xc_i \leftarrow xt \\ i \leftarrow i + 1 \end{cases} \\ xc \end{cases}$

$P^T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 0 & 50.79 & 101.58 & 152.35 & 253.94 & 304.73 & 355.52 & 406.31 & 457.1 & 507.89 & 609.47 & 660.26 & 711.05 \end{array}$

$k := 0..11 \quad im := 7 \quad jm := 8$

$i := 0..im \quad j := 1..jm \quad dz := \frac{L}{jm}$

$dr := \frac{R_n - R_v}{im} \quad z_j := j \cdot \frac{L}{jm} \quad rr_i := R_v + i \cdot \frac{R_n - R_v}{im}$

$A1_{k,i} := J0\left(P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}\right) \cdot Y0\left(P_k \cdot \frac{rr_i}{R_{cp}}\right) - Y0\left(P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}\right) \cdot J0\left(P_k \cdot \frac{rr_i}{R_{cp}}\right)$

$A2_{k,i} := Y0\left(P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}\right) \cdot J0\left(P_k \cdot \frac{rr_i}{R_{cp}}\right) - J0\left(P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}\right) \cdot Y0\left(P_k \cdot \frac{rr_i}{R_{cp}}\right)$

$KJY_k := -J1\left(P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}\right) \cdot Y0\left(P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}\right) \cdot R_n - J0\left(P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}\right) \cdot Y1\left(P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}\right) \cdot R_v \dots$ 
 $+ J1\left(P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}\right) \cdot Y0\left(P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}\right) \cdot R_v + J0\left(P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}\right) \cdot Y1\left(P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}\right) \cdot R_n$

$D1_k := J0\left(P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}\right) - J0\left(P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}\right) \quad D2_k := Y0\left(P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}\right) - Y0\left(P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}\right)$

$D_{k,i} := Y0\left(P_k \cdot \frac{rr_i}{R_{cp}}\right) \cdot D1_k - J0\left(P_k \cdot \frac{rr_i}{R_{cp}}\right) \cdot D2_k$

$T_n := 295 \cdot K \quad T_v := 305 \cdot K \quad T_p := 400 \cdot K$

Рис. 3. Програмный блок MathCAD

$$\lambda_m := 0.13 \cdot \frac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \quad \rho_m := 820 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad C_{pm} := 2.2 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$V_z := 0.015 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad a_z := \frac{\lambda_m}{\rho_m \cdot C_{pm} \cdot V_z} \quad a_z = 4.804 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$E_k := a_z \cdot \frac{(P_k)^2}{R_{cp}^2}$$

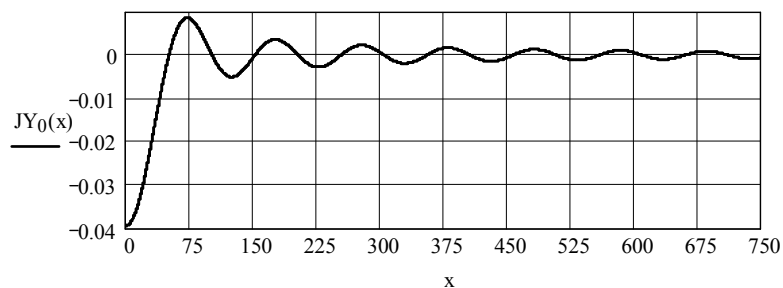
T :=

```

for j ∈ 0.. jm
  for i ∈ 0.. im
    Thi,0 ← Tp
    T0i,j ← Tp · [ 1 + 2 · Rcp · ∑k  $\frac{D_{k,i}}{P_k \cdot KJY_k} \cdot (1 - \exp(-E_k \cdot z_j))$  ]
    T1i,j ← 2 · Rcp · ∑k  $\frac{T_n \cdot A1_{k,i} + T_v \cdot A2_{k,i}}{P_k \cdot KJY_k} \cdot (1 - \exp(-E_k \cdot z_j))$ 
    T00,j ← Tv
    Ti,j ← T0i,j - T1i,j
    Ti,j ← Tn if i = im
  
```

T

Продовження рис. 3.

Рис. 4. Графік для визначення нулів функції  $JY_0(x)$



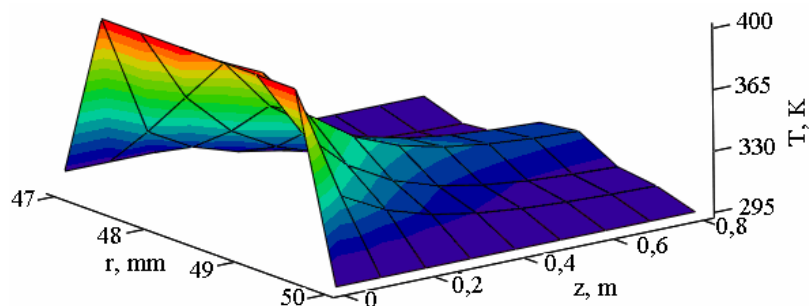


Рис. 5. Тривимірний графік для розподілення температури при охолодженні трубних заготовок із полімерів

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берд Р., Стьюарт В., Лайфут Е. Явления переноса. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
2. Vxhme G. Strmungsmechanik nicht-newtonscher fluids. – Stuttgart: B.G. Teubner, 1981. – 280 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-96673-5>
3. Леваничев В. Анализ полной реологической модели течения расплава полимера // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т.2. – № 6(74). – С.11-16. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.38951>
4. Kabat O., Sytar V., Sukhyu K. Antifrictional polymer composites based on aromatic polyamide and carbon black // Chemistry & Chemical Technology. 2018. – Vol.12(3). – P.326-330. <https://doi.org/10.23939/chcht12.03.326>
5. Кузяев И.М. Моделирование работы та проектування екструзійних агрегатів з розробкою елементів САПР: Монографія. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2008. – 474 с.
6. Кузяев И.М., Сытар В.И., Кулинич В.К. Моделирование охлаждения гранул при пневмоэкструзионном гранулировании полимеров // Вопр. химии и хим. технологии. – 2004. – № 1. – С.191-197.
7. Сытар В.И., Данилин Д.С., Кузяева С.И. Исследование с помощью математических моделей неизо термических процессов в рабочем объеме червячных машин для термопластичных полимерных композитов с учетом кривизны винтового канала // Вопр. химии и хим. технологии. – 2005. – № 6. – С.183-189.
8. Sikora, J.W., Sasimowski E. Influence of the length of the plasticating system on selected characteristics of an autothermal extrusion process // Advances in Polymer Technology. – 2005. – Vol.24. – № 1. – P.21-28. <https://doi.org/10.1002/adv.20021>
9. Hwang W.R., Kwon T.H. Chaotic Volumetric Transports in a Sing le-Screw Extrusion Process // Polymer Engineering and Science. – 2003. – Vol.43. – № 4. – P.783-797. <https://doi.org/10.1002/pen.10065>
10. Kabat O.S. Fillers on the silica base for polymer composites of constructional purpose / O.S. Kabat, K.V. Heti, I.L. Kovalenko, A.M. Dudka // Journal of chemistry and technologies. – 2019. – Vol.27(2) – P.247-254. <https://doi.org/10.15421/081925>
11. Алямовский А.А. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 423 с.
12. Кузяев И.М., Митрохин А.А. Моделирование работы и проектирование технологического оборудования с разработкой модулей САПР // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. – 2012. – № 2(27). – С.60-65.
13. Лошкарев А.И., Облакова Т.В. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: МГТУ, 2006. – 744 с.
14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 734 с.
15. Тевяшев А., Литвин А., Кривошеева Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – К.: Кондор, 2006. – 608 с.

Надійшла до редакції 19.09.2020

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУБНЫХ ЗАГОТОВОК ИЗ ПОЛИМЕРОВ

Кузяев И.М., Митрохин А.А., Казимиров И.П.

Изготовлению полимерных труб посвящено много научных трудов. При этом такому процессу, как охлаждение конечного продукта после экструзии, уделено немного внимания. Охлаждение полимерных трубных заготовок, как и большинство процессов переработки пластмасс, относится к неизо термическим процессам, то есть необходимо решать тепловую задачу. От точного расчета теплового баланса очень зависит конечный результат экструзионного процесса. В данной работе разработана математическая модель процессов охлаждения трубных заготовок из полимеров, полученных методом экструзии. Создано несколько математических моделей тепловых процессов для теплоэнергетического оборудования. При этом предложены разные расчетные схемы, методы и уравнения для их решения. Математическую модель для отображения процессов охлаждения полимерных трубных заготовок после их экструзии можно считать расширением этих исследований. В ходе построения математической модели использована цилиндрическая система координат в предположении симметричности вдоль угловой координаты. При этом в начальной постановке рассматривался нестационарный процесс. В дальнейшем, используя замену независимой переменной по времени через независимую переменную по осевой координате и осевой

скорості движения, виконан переход к дифференциальному уравнению в частных производных вдоль двух линейных координат. Решение данного уравнения находилось с помощью операционного метода (методом интегрального превращения Лапласа). Окончательное решение поставленной задачи (после прямого и обратного превращения Лапласа) получено через функции Бесселя на базе пакета MATHCAD с использованием ряда встроенных в данный пакет функций и вычислительных блоков. Таким образом, в данной работе разработана математическая модель для моделирования и оптимизации процессов охлаждения трубных заготовок из полимерных материалов. На базе разработанной математической модели построен программный блок MATHCAD для реализации данной модели. Приведены результаты расчетов в виде графиков, которые позволяют характеризовать адекватность представленных материалов.

**Ключевые слова:** математическая модель, уравнение баланса, превращение Лапласа, программный блок.

## MATHEMATICAL MODELING OF CHILLING PROCESS OF POLYMER TUBE BILLETS

Kuzayev I., Mitrokhin O., Kazimirov I.

Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro, Ukraine

There are many works about producing of polymer tubes. But less attention is paid to the process of chilling of polymer products. The chilling of polymer tube billets, as most polymer processing processes, is a non-isothermal process. This means that it is necessary to solve the heat problem. Accurate calculation of the heat balance is one of the main components for the final result of the extrusion process. The mathematical model had been created for process of chilling of polymer tube billets after extrusion in this work. Several mathematical models of heating process for heat and power equipment have been created. Different calculation schemes, methods and equations for its solution are suggested. The mathematical model for process of chilling of polymer tube billets after it extrusion can be considered an expansion of research. The mathematical model is based on cylindrical coordinate system with assumption of axisymmetric along angular coordinate. The initial problem statement considered non-stationary process. A transition was made to the differential equation in partial derivatives along two linear coordinates. Solution of this equation was found using the operation method (Laplace integral transform method). The final solution of the problem (after direct and reverse Laplace transform) was obtained from the Bessel function. It was calculated in MathCAD with the help of built-in functions and computing modules. The mathematical model was created for modeling and optimization of process of chilling of polymer tube billets. The results of calculation were presented as graphs that make it possible to characterize the adequacy of the materials.

**Keywords:** mathematical model, balance equation, Laplace transform, program block.

### REFERENCES

1. Berd R., St'juart V., Lajfut E. *Javlenija perenosa*. [Transport phenomena] Moscow, *Himija*, 1974. 688 p. (in Russian).
2. Bxhme G. *Strxmungsmechanik nicht-newtonscher fluids*. Stuttgart: *B.G. Teubner*, 1981. 280 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-96673-5>
3. Levanichev V. *Analiz polnoj reologicheskoy modeli tehnenija rasplava polimera* [Analysis of the complete rheological model of the polymer melt flow]. *Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij*. 2015, vol. 2, no 6(74), pp. 11-16. (in Russian). <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.38951>
4. Kabat O., Sytar V., Sukhyy K. Antifrictional polymer composites based on aromatic polyamide and carbon black. *Chemistry & Chemical Technology*. 2018, vol. 12(3). pp.326-330. <https://doi.org/10.23939/chcht12.03.326>
5. Kuzjaev I.M. *Modeljuvannja roboti ta proektuvannja ekstruzijnih agregativ z rozrobkoju elementiv SAPR* [Modeling and design of extrusion units with the development of CAD elements]: Monografija. Dnipropetrovs'k: *DVNZ UDHTU*, 2008, 474 p. (in Ukrainian).
6. Kuzjaev I.M., Sytar V.I., Kulinich V.K. *Modelirovanie ohlazhdenija granul pri pnevmojekstruzionnom granulirovanii polimerov* [Modeling of cooling of granules during pneumo-extrusion granulation of polymer], *Vopr. himii i him. tehnologij*. 2004, no. 1, pp.191-197. (in Russian).
7. Sytar V.I., Danilin D.S., Kuzjaeva S.I. *Issledovanie s pomoshh'ju matematicheskikh modelej neizotermicheskikh processov v rabochem ob#eme chervjachnyh mashin dlja termoplastichnyh polimernyh kompozitov s uchetom krivizny vintovogo kanala* [Research using mathematical models of non-isothermal processes in the working volume of worm gears for thermoplastic polymer composites taking into account the curvature of the screw channel], *Voprosy himii i himicheskoy tehnologii*. 2005, no. 6, pp.183-189. (in Russian).
8. Sikora J.W., Sasimowski E. Influence of the length of the plasticating system on selected characteristics of an autothermal process. *Advances in Polymer Technology*, 2005, vol. 24, no. 1, pp.21-28. <https://doi.org/10.1002/adv.20021>
9. Hwang W.R., Kwon T.H. Chaotic Volumetric Transports in a Single-Screw Extrusion Process, *Polymer Engineering and Science*, 2003, vol. 43, no. 4, pp.783-797. <https://doi.org/10.1002/pen.10065>
10. Kabat O.S., Heti K.V., Kovalenko I.L., Dudka A.M. Fillers on the silica base for polymer composites of constructional purpose. *Journal of chemistry and technologies*, 2019, vol. 27(2), pp.247-254. <https://doi.org/10.15421/081925>
11. Aljamovskij A.A. *SolidWorks and CosmosWorks. Inzhenernyj analiz metodom konechnykh jelementov* [Finite Element Analysis], Moscow, *DMK Press*, 2004, 423 p. (in Russian).
12. Kuzjaev I.M., Mitrohin A.A. *Modelirovanie raboty i proektirovanie tehnologicheskogo oborudovanija s razrabotkoju modulej SAPR* [Modeling of work and design of technological equipment with the development of CAD modules], *Visnik Donbas'koj derzhavnoj mashinobudivnoj akademii*, 2012, no. 2(27), pp.60-65. (in Russian).
13. Loshkarev A.I., Oblakova T.V. *Integral'nye preobrazovanija i operacionnoe ischislenie* [Integral transformations and operational calculus]. Moscow, *MGTU*, 2006, 744 p. (in Russian).
14. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funkcej kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, *Kniga po Trebovaniju*, 2013, 734 p. (in Russian).
15. Tevjashev A., Litvin A., Krivosheeva G. *Vishha matematika u prikladah ta zadachah*. Ch. 3. *Diferencial'ni rivnjannja*. Rjadi. Funkcii kompleksnoj zminnoj. Operacijne chislenija [Higher mathematics in examples and problems. Part 3. Differential equations. Rows. Functions of a complex variable. Operating calculus]. Kyiv, *Kondor*, 2006, 608 p. (in Ukrainian).