

УДК 004.94+532.135

*Кузяев И.М., Митрохин А.А.***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКИХ СРЕД В РАБОЧИХ ЗОНАХ ОБОРУДОВАНИЯ С ДИСКОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ****ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепр, Украина**

В настоящей работе разработана математическая модель движения жидких сред в рабочих зонах, образованных между двумя дисками, имеющих место во многих типах перерабатывающего оборудования, среди которых можно выделить дисковые и червячно-дисковые экструдеры для переработки полимеров, а также дисковые импульсные аппараты, используемые в системах отопления. При получении математической модели использовалась цилиндрическая система координат в допущении осесимметричности вдоль угловой координаты и пренебрежения осевой составляющей скорости, что дало возможность получить систему двух дифференциальных уравнений в частных производных. Использование уравнения неразрывности позволило преобразовать полученную модель к системе двух дифференциальных нелинейных уравнений в обыкновенных производных. Решение разработанной математической модели может быть получено для двух режимов функционирования дисковых машин, а именно: первое – безнапорное движение; второе – напорное движение. Для первого режима можно пренебречь градиентом давления вдоль радиальной оси, а в случае второго режима компонент уравнения движения с градиентом давления, возникающего вследствие разностей производительностей через входное и выходное отверстия, необходимо обязательно учитывать. Воспроизведение математической модели осуществлялось при помощи пакета MathCAD с использованием вычислительного блока Given-Odesolve. При этом на начальном этапе рассматривался первый режим. Результаты расчетов показали, что для реальных геометрических и технологических параметров функция угловой составляющей скорости имеет линейный характер. Используя последнее замечание, представляется возможным значительно упростить математическую модель. С использованием полученной математической модели определена функция диссипации, характеризующая межмолекулярное взаимодействие в рабочей среде. Имея картину распределения функции диссипации по объему рабочего пространства, рассчитана затрачиваемая мощность на продвижение перерабатываемой жидкости. В работе приведено большое количество графиков, позволяющих оценить адекватность полученных результатов разработанной математической модели.

Ключевые слова: уравнения движения, уравнение неразрывности, математическая модель, система дифференциальных уравнений, градиент давления, пакет MathCAD, дисковые и червячно-дисковые экструдеры, дисковые импульсные аппараты.

DOI: 10.32434/2521-6406-2019-6-2-10-16

Постановка проблемы

В настоящее время широкое использование нашло оборудования, в котором имеют место вращающиеся элементы дисковой формы, образующие соответствующие рабочие зоны, где выполняются необходимые процессы.

К такому типу оборудования можно, в пер-

вую очередь, отнести дисковые и червячно-дисковые экструдеры для переработки полимеров [1]. Основное назначение данного типа оборудования заключается в подготовке полимерных композиций с необходимым качеством, что достигается соответствующей степенью гомогенизации.

Ко второму типу оборудования с дисковыми рабочими зонами можно отнести дисковые импульсные аппараты, используемые в системах отопления [2].

Для того чтобы оптимизировать технологические и геометрические характеристики перерабатывающего оборудования, необходимо иметь соответствующую математическую модель, что значительно ускоряет процесс проектирования машинных агрегатов.

Анализ публикаций и исследований

Решение уравнения движения (Навье-Стокса) для течения возле бесконечно большого вращающегося диска для ньютоновской жидкости впервые дал Карман [3]. Используя гипотезу о сходстве, Карман свел уравнения Навье-Стокса к обычным нелинейным дифференциальным уравнениям вида:

$$v \cdot H^{IV} + H \cdot H^{III} + G \cdot G^I = 0; \quad (1)$$

$$v \cdot G^{II} + H \cdot G^I - H^I \cdot G = 0, \quad (2)$$

где v – кинематическая вязкость; $V_z = -H(z)$; $V_r = r/2 \cdot H^I(z)$; $V_\theta = r/2 \cdot G(z)$.

Решив систему уравнений (1) и (2), Карман доказал, что на расстоянии от граничного слоя жидкости, который находится вблизи от диска, тангенциальные и радиальные скорости приближаются к нулю при увеличении числа Рейнольдса.

Используя подход Кармана, Бетчелор решил задачу о движении жидкости между двумя дисками, которые вращаются вокруг общей оси, перпендикулярной к ним. Бетчелор преобразовал уравнения Навье-Стокса к следующей системе:

$$\frac{1}{4} \cdot (h^I)^2 - \frac{1}{2} \cdot h \cdot h^{II} - g^2 = - \left(\frac{\omega^2 + c}{\omega^2} \right) - \frac{1}{2} \cdot h^{III}; \quad (3)$$

$$-g \cdot h^I + g^I \cdot h = g^{II}, \quad (4)$$

где ω – угловая скорость; c – константа;

$$V_z = \sqrt{v \cdot \omega} \cdot h(\zeta); \quad V_\phi = \sqrt{v \cdot \omega} \cdot \psi \cdot g(\zeta);$$

$$r = \sqrt{v/\omega} \cdot \psi; \quad z = \sqrt{v/\omega} \cdot \zeta.$$

Полученные Бетчелором результаты указывают на то, что при больших числах Рейнольдса основной объем жидкости вращается с постоянной угловой скоростью. Кроме того, возле

поверхностей дисков возникают граничные слои.

Другой результат был получен Стеватсоном [4]. Его данные указывают на то, что в случае движения двух дисков в противоположных направлениях или при одном неподвижном диске, основная масса жидкости, расположенная за пределами граничных слоев дисков, вращаться не будет.

В работе Дийкстра и ван Хейста [5] рассматривалось поведение жидкости между двумя конечными вращающимися дисками, внешние диаметры которых ограничены цилиндром.

Результаты данной работы в случае, если один диск неподвижный, а второй вращается, совпадают с теорией Бетчелора, то есть значительная часть жидкости, которая находится за пределами граничных слоев, вращается как твердое тело.

Значительный интерес в теоретическом и прикладном плане имеют работы Шери и Адамса [6,7] применительно их использования при проектировании гидростатических подшипников, торцовых уплотнений, дисков муфт сцепления и вращающихся теплообменников.

Одним из основных вопросов при проектировании гидростатических подшипников является создание необходимого давления между торцовыми поверхностями вала и корпуса, которые образуют дисковое пространство с незначительной высотой по отношению к радиусу.

В работах Шери и Адамса получено уравнение для распределения давления в дисковом зазоре в виде:

$$P(r) = P(r_1) + \frac{\eta \cdot v \cdot Re}{H^2} \cdot \Delta \bar{P}(\bar{r}, \bar{r}_1), \quad (5)$$

$$\text{где } \Delta \bar{P}(\bar{r}, \bar{r}_1) = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}} \frac{d\bar{P}(\bar{r})}{d\bar{r}} \cdot d\bar{r}; \quad Re = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot v \cdot H}.$$

В работе [8] было рассмотрено течение максвелловской жидкости в дисковом пространстве. Используя данный тип жидкости, можно качественно объяснить много известных проявлений вязкоупругих жидкостей, такие, например, как релаксация напряжений и эластичное восстановление среды после внезапного снятия приложенного напряжения. Необходимо, однако, отметить, что уравнение, описывающее поведение жидкости Максвелла, ограничено зоной бесконечно малых деформаций и, кроме того, для стационарных режимов течения оно переходит

в уравнение для ньютоновских сред.

Среди последних исследований движения перерабатываемых материалов между двумя пластинами можно выделить работы В. Леваничева [9,10], где рассматривались процессы движения в рабочем канале экструдера.

Цель и задачи исследования

Разработать математическую модель, позволяющую выполнять аналитические исследования процессов движения, в рабочих пространствах перерабатывающего оборудования, образованных между двумя дисками. На основе решения математической модели оптимизировать геометрические и технологические параметры рабочего пространства в соответствии с характеристиками перерабатываемой среды.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи: построение базовой математической модели; модернизация полученной базовой математической модели; оптимизационные аналитические исследования влияния параметров рабочего дискового пространства и характеристик жидкостей, протекающих через рабочий канал.

Основная часть исследований

При разработке математической модели, связанной с движением жидких сред в каналах различной формы, обязательным условием является использование уравнений движения в необходимой системе координат (в данном случае следует использовать цилиндрическую систему координат). Кроме того, также обязательным элементом математического аппарата является реологическое уравнение состояния, связывающее компоненты тензора напряжений с компонентами тензора скоростей деформаций. Для простейшего случая эта связь описывает ньютоновскую жидкость. В некоторых случаях при разработке математических моделей следует использовать уравнение неразрывности.

Для построения математической модели расчетная схема выглядит таким образом (рис. 1).

Построение математических моделей будем осуществлять на базе таких допущений: процесс осесимметричный, т.е. изменением физических величин вдоль угловой координаты будем пренебрегать ($d/dj=0$); процесс стационарный, т.е. изменения физических величин во времени будут несущественным ($d/dt=0$); массовыми силами будем пренебрегать; вследствие реальной геометрии дискового канала ($h \ll R_2$) будем пренебрегать составляющей скорости V_z .

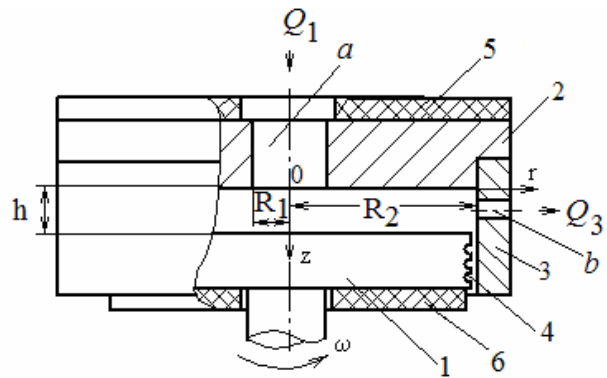


Рис. 1. Расчетная схема для построения математических моделей: а, b – соответственно входное и выходное отверстия; 1 – вращающийся диск; 2, 3 – соответственно дисковая и цилиндрическая части корпуса; 4 – уплотнительный элемент; 5, 6 – теплоизоляционные пластины соответственно дисковой части корпуса и вращающегося диска

Используя принятые допущения, уравнения движения для ньютоновской жидкости можно записать в таком виде:

$$\rho \cdot \left(V_r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\varphi^2}{r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \eta \cdot \left[2 \cdot \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \cdot \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r} \right) \right]; \quad (6)$$

$$\rho \cdot \left(V_r \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_r \cdot V_\varphi}{r} \right) = \eta \cdot \left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} \right], \quad (7)$$

где V_r , V_φ – компоненты скорости в цилиндрической системе координат; ρ , η – соответственно плотность и вязкость жидкости; dp/dr – градиент давления вдоль радиальной координаты.

В данном случае для упрощения математической модели следует воспользоваться уравнение неразрывности в виде:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r/r = 0. \quad (8)$$

Из последнего уравнения вытекает такая зависимость:

$$V_r = f(z)/r, \tag{9}$$

где $f(z)$ – некоторая функция, зависящая только от координаты z . Для угловой составляющей скорости примем такую зависимость:

$$V_\phi = \zeta(z) \cdot r, \tag{10}$$

где $\zeta(z)$ – некоторая функция, зависящая также только от координаты z .

Соответствующая подстановка приводит к такой системе:

$$\rho \cdot \left(-\frac{f(z)^2}{r^3} - \zeta(z)^2 \cdot r \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \eta \cdot \frac{f''(z)}{r}; \tag{11}$$

$$\rho \cdot \frac{2 \cdot f(z)}{r} \cdot \zeta(z) = \eta \cdot \zeta''(z) \cdot r. \tag{12}$$

Решение системы уравнений (11) и (12) может быть осуществлено для двух режимов: первый – безнапорное течение (в данном случае градиент давления равен нулю); второй – напорное течение (в данном случае градиент давления не равен нулю, а зависит от соотношений производительностей Q_1 и Q_3).

Реализация математической модели воспроизводилась при помощи математического пакета MathCAD. Для решения системы уравнений (11)–(12) воспользуемся вычислительным блоком Given-Odesolve. Решение в виде графиков приведено на рис. 2. При этом приняты такие параметры: коэффициент вязкости жидкости – $\eta=180$ Па·с; угловая скорость вращения диска – $\omega=16$ с⁻¹; плотность жидкости – $\rho=925$ кг/м³; радиус диска – $r=0,15$ м.

Как видно из приведенных графиков на рис. 2, на значительном интервале высот дискового канала, охватывающих практически весь класс данного типа агрегатов, можно использовать линейную зависимость угловой составляющей скорости по высоте зазора, то есть вместо соотношения (10) будет справедливым такое равенство:

$$V_\phi = \frac{\omega}{h} \cdot z \cdot r. \tag{13}$$

Кроме того, численный анализ уравнения (11) приводит к заключению, что второй член, стоящий в правой части уравнения (11), как минимум, на два порядка больше, чем первый.

Два последних замечания позволяет существенно упростить систему уравнений (11) и (12), а именно: данная система уравнений переходит в одно дифференциальное уравнение второго порядка относительно радиальной составляющей скорости в обыкновенных производных. Таким образом, вместо системы уравнений (11) и (12), с учетом выражения (9), можно записать уравнение:

$$\frac{d^2 V_r}{dz^2} + K_1 \cdot \frac{z^2 \cdot r}{h^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}, \tag{14}$$

где $K_1 = \frac{\rho \cdot \omega^2}{\eta}$.

С учетом неизменности геометрических и технологических параметров в уравнении (14) относительно осевой координаты (кроме радиальной скорости) последнее уравнение представ-

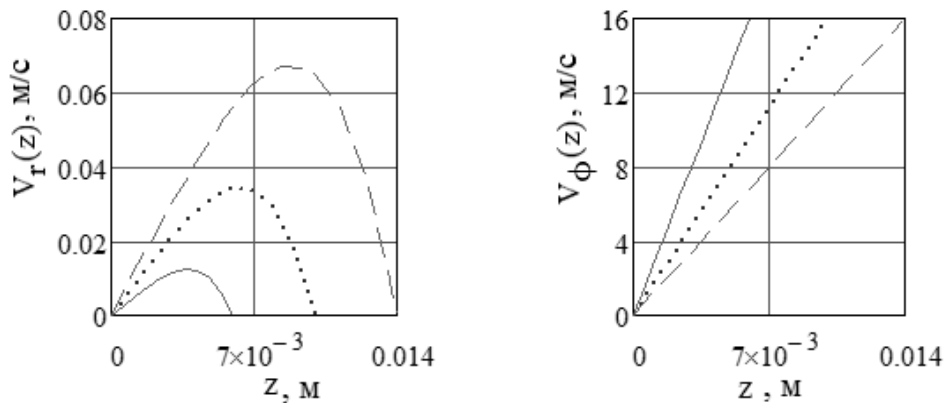


Рис. 2. Графики распределения скорости в дисковом канале при разных значениях высоты h: ——— h=6 мм; h=10 мм; - - - h=14 мм

ляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. При этом используя уравнение неразрывности в интегральной форме ($G_1 + G_2 - G_3 = 0$, где G_1 – расход жидкости, поступающей через входной патрубок; G_2 – расход жидкости в дисковом канале, образованный за счет вращения диска; G_3 – расход жидкости на выходе из рабочей камеры), можно найти градиент давления вдоль радиальной оси.

Окончательно решение уравнения (14) можно записать в таком виде:

$$V_r(z, r) = \frac{3z}{\pi r h^3} (z - h)(G_1 - G_3) - K_1 r \frac{z}{h^2} (0,067h^3 + 0,83z^3 - 0,15h^2z). \quad (15)$$

На рис. 3 представлен объемный график для радиальной скорости в дисковом канале, полученный по формуле (15) при таких параметрах: $h=5$ мм, $\eta=180$ Па·с; $\omega=16$ с⁻¹; $\rho=925$ кг/м³; $R_1=10$ мм; $R_2=150$ мм; $G_1=8 \cdot 10^{-8}$ м³/с; $G_3=7,9 \cdot 10^{-8}$ м³/с.

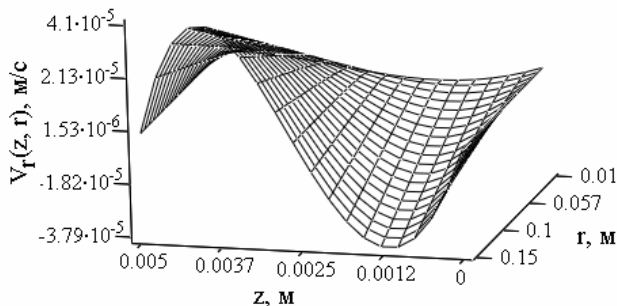


Рис. 3. Объемный график распределения радиальной скорости в дисковом канале

Немаловажное значение при оптимизации характеристик рабочих зон промышленного оборудования имеет возможность отыскания диссипативных потерь. Зная функцию диссипации, можно найти затрачиваемую в рабочем канале мощность. Для этого найденную функцию диссипации необходимо проинтегрировать по всему объему. Пренебрегая величинами высшего порядка, для функции диссипации можно записать такое выражение

$$F_d(z, r) = 2 \cdot \eta \cdot \left(\frac{\omega \cdot r}{h} \right)^2. \quad (16)$$

После интегрирования функции диссипации значение мощности в дисковом зазоре можно найти из такого соотношения

$$W_d = 2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot \frac{\omega^2}{4 \cdot h} \cdot (R_2^4 - R_1^4). \quad (17)$$

На рис. 4 представлен объемный график для функции диссипации в дисковом канале, полученный по формуле (16) при таких параметрах: $h=5$ мм, $\eta=180$ Па·с; $\omega=16$ с⁻¹; $\rho=925$ кг/м³; $R_1=10$ мм; $R_2=150$ мм.

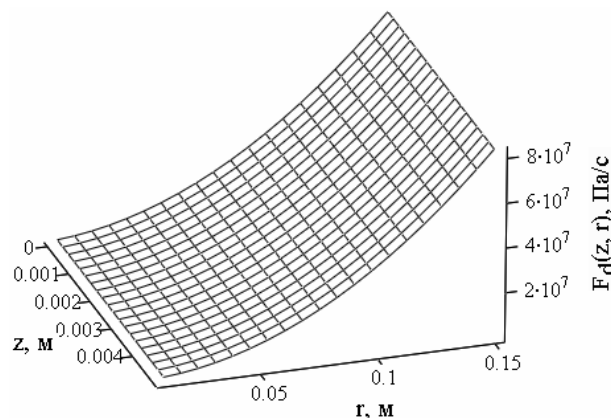


Рис. 4. Объемный график распределения функции диссипации в дисковом канале

Для параметров, принятых согласно с рис. 4, а также исходя из формулы (17), затрачиваемая мощность в дисковом канале составит $W_d=7,33$ кВт.

Выводы

Разработана математическая модель для моделирования процессов течения жидкостей в дисковых каналах при вращении одного из дисков, на базе которой построен программный блок в пакете MathCAD, позволяющий оптимизировать режимы работы в соответствии со свойствами перерабатываемой среды и геометрическими характеристиками рабочей зоны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнев И.М., Свидерский В.А., Петухов А.Д. Моделирование экструзии и экструдеров при переработке полимеров: монография, в 2 ч. Часть 2. – Киев: НТУУ «КПИ» Изд-во «Политехника», 2016. – 217 с.
2. Examining a cavitation heat generation and the control method over the efficiency of its operation / V. Nikolsky, O. Oliynyk, A. Lipeev, V. Ved // Eastern-European journal of

enterprise technologies. – 2017. – Vol. 4. – № 8 (88). – P.22-28. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.108580>

3. Кузяев И.М. Основополагающие аспекты моделирования процессов в дисковых зазорах при течении через них жидких сред // Вопросы химии и хим. технологии. – 2007. – № 2. – С.188-203.

4. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1953. – № 49. – P.333-341. <https://doi.org/10.1017/S0305004100028437>

5. Dijkstra D., Van Heijst G.J. The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder // J. Fluid Mech. – 1983. – № 128. – P.123-154. <https://doi.org/10.1017/S0022112083000415>

6. Szeri A.Z. Fluid Film Lubrication, 2 edition // Cambridge University Press. – 2010. – 600 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511782022>

7. Adams M.L. Rotating Machinery Vibration: From Analysis to Troubleshooting, 2 edition // CRC Press, 2010. – 476 p. <https://doi.org/10.1201/9781439847558>

8. Phan-Thien N. Coaxial-disk flow and flow about a rotating disk of a Maxwellian fluid // J. Fluid Mech. – 1983. – № 128. – С.427-442. <https://doi.org/10.1017/S0022112083000543>

9. Леваничев В.В. Анализ полной реологической модели течения расплава полимера // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т.2. – № 6 (74). – С.11-16.

10. Леваничев В.В. Разработка модели движения расплава полимера в экструдере // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т.5. – № 5 (77). – С.7-13.

Поступила в редакцию 29.10.2019

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РУХУ РІДКИХ СЕРЕДОВИЩ В РОБОЧИХ ЗОНАХ УСТАТКУВАННЯ З ДИСКОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Кузяев І.М., Митрохін О.А.

У даній роботі розроблено математичну модель руху рідких середовищ у робочих зонах, утворених між двома дисками, що мають місце в багатьох типах переробного устаткування, серед яких можна виділити дискові й черв'ячно-дискові екструдери для переробки полімерів, а також дискові імпульсні апарати, використовувани в системах опалювання. При розробці математичної моделі використовувалася циліндрична система координат в припущенні осесиметричності вздовж кутової координати й нехтуванні осью складовою швидкості, що дало можливість отримати систему двох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Використання рівняння нерозривності дозволило перетворити отриману модель до системи двох диференціальних нелінійних рівнянь у звичайних похідних. Вирішення розробленої математичної моделі може бути отримано для двох режимів функціонування дискових машин, а саме: перший – безнапірний рух; другий – напірний рух. Для першого режиму можна нехтувати градієнтом тиску вздовж радіальної осі, а в разі другого режиму компонент рівняння руху з градієнтом тиску, що виникає внаслідок різниць продуктивностей через вхідний і вихідний отвори, необхідно обов'язково враховувати. Відтворення математичної моделі

здійснювалося за допомогою пакета MATHCAD з використанням обчислювального блока Given-Odesolve. При цьому на початковому етапі розглядався перший режим. Результати розрахунків показали, що для реальних геометричних і технологічних параметрів функція кутової складової швидкості має лінійний характер. Використання останнього зауваження, дає можливість значно спростити математичну модель. З використанням отриманої математичної моделі визначено функцію дисипації, що характеризує міжмолекулярну взаємодію в робочому середовищі. Маючи картину розподілу функції дисипації за об'ємом робочого простору, розраховано потужність, яка витрачається на просування перероблюваної рідини. У роботі наведено велику кількість графіків, які дозволяють оцінити адекватність отриманих результатів розробленої математичної моделі.

Ключові слова: рівняння руху, рівняння нерозривності, математична модель, система диференціальних рівнянь, градієнт тиску, пакет MATHCAD, дискові та черв'ячно-дискові екструдери, дискові імпульсні апарати.

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF LIQUID MEDIA MOTION IN WORKING AREA OF EQUIPMENT WITH DISK ELEMENTS

Kuzayev I.M., Mitrokhin O.A.

Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro, Ukraine

The paper considers a mathematical model of the process of liquid media motion in working area, created between two disks, which occur in many types of processing equipment, among which we can distinguish disk and screw-disk extruders for polymer processing, as well as disk impulse devices used in heating systems. In obtaining the mathematical model, a cylindrical coordinate system was used assuming axisymmetry along the angular coordinate and neglecting the axial component of the velocity, which made it possible to obtain a system of two partial differential equations. The use of continuity equation made it possible to transform the mathematical model to a system consisting from two differential nonlinear equations in ordinary derivatives. The solution for the mathematical model can be obtained for two working modes of disk machine: non-pressure motion and pressure motion. For the first mode, the pressure gradient along the radial axis can be neglected, and in the case of the second mode, the components of the equation of motion with the pressure gradient arising due to differences in performance through the inlet and outlet openings must be taken into account. The creation of mathematical model take place with help of MATHCAD package and its block Given-Odesolve. At the same time, the first mode was considered at the initial stage. The calculation results showed that for real geometric and technological parameters, the function of the angular velocity component is linear. The usage of last remark gives possibility to simplify the mathematical model. With help of mathematical model we obtained dissipation function, which describe intermolecular interaction in working medium. Having a picture of distribution of the dissipation function over the volume of the working space, the expended power for the promotion of the processed liquid is calculated. A large number of graphs are given in the work, which makes it possible to evaluate the adequacy of the results of the developed mathematical model.

Keywords: equation of motion, continuity equation, mathematical model, system of differential equations, pressure gradient, MATHCAD, disk and screw-disk extruder, disk impulse device.

REFERENCES

1. Kuzyayev I.M. *Modelirovanie ekstruzii i ekstrudеров pri pererabotke polimerov monografiya, v 2 ch. Chast 2* [Modeling of extrusion and extruders in the processing of polymers: monograph, in 2 parts. Part 2]. Kiev: NTUU KPI, Politehnika Publ., 2016, 217 p. (in Russian).
2. Nikolsky V., Oliynyk O., Lipeev A., Ved V. Examining a cavitation heat generation and the control method over the efficiency of its operation. Eastern-European journal of enterprise technologies. 2017, vol.4, no. 8 (88), pp.22-28. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.108580>
3. Kuzyayev I.M. Osnovopolagayushie aspekty modelirovaniya processov v diskovyh zazorah pri techenii cherez nih zhidkikh sred [Fundamental aspects of modeling processes in disk gaps when liquid media flow through them]. Voprosy himii i him. tehnologii [Issues of Chemistry and Chemical Technology]. 2007, no. 2, pp.188-203. (in Russian).
4. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953, no. 49, pp.333-341. <https://doi.org/10.1017/S0305004100028437>
5. Dijkstra D., Van Heijst G.J. The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder. J. Fluid Mech. 1983, no. 128, pp.123-154. <https://doi.org/10.1017/S0022112083000415>
6. Szeri A.Z. Fluid Film Lubrication, 2 edition. Cambridge University Press, 2010, 600 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511782022>
7. Adams M.L. Rotating Machinery Vibration: From Analysis to Troubleshooting, 2 edition. CRC Press, 2010, 476 p. <https://doi.org/10.1201/9781439847558>
8. Phan-Thien N. Coaxial-disk flow and flow about a rotating disk of a Maxwellian fluid. J. Fluid Mech, 1983, no. 128, pp.427-442. <https://doi.org/10.1017/S0022112083000543>
9. Levanichev V.V. Analiz polnoj reologicheskoy modeli techeniya raspava polimera [Analysis of the complete rheological model of the flow of polymer melt]. Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij [East European Journal of Advanced Technologies]. 2015, vol.2, no. 6 (74), pp.11-16. (in Russian).
10. Levanichev V.V. Razrabotka modeli dvizheniya raspava polimera v ekstrudere [Development of a model for the movement of polymer melt in an extruder]. Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij [East European Journal of Advanced Technologies]. 2015, vol.5, no. 5 (77), pp.7-13. (in Russian).