

УДК 51-74: 519.673

*Олевский В.И.^а, Олевский А.В.^б***НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗГИБА УПРУГОЙ КРУГОВОЙ АРКИ С ВЫРЕЗОМ**^а ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепр, Украина^б ГВУЗ «Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара», г. Днепр, Украина

Конструкции, моделирование которых сводится к схеме круговой арки, широко применяются в сложных сооружениях типа плотин и перекрытий, при проектировании силовых элементов в авиа- и судостроении. Для решения различных технологических задач в толщине арки часто необходимо предусмотреть вырезы. При этом при выборе рациональных параметров конструкции необходимо делать множественные пересчеты упругого изгиба арки, поэтому в задачах оптимизации конструкции принято использовать упрощенные схемы расчета. Такие схемы часто не учитывают особенности деформирования арки с вырезами, концентрацию напряжений в таких конструкциях и изменение характера их изгиба по сравнению с цельной аркой. Особенно ярко такие особенности проявляются в арках, имеющих относительно большую высоту профиля в радиальном направлении. К таким моделям сводится расчет арки-стенки и облегченной арки из сварных листов. В работе проведен плоский расчет упругой круговой металлической арки с центральным полукруглым вырезом с различным соотношением конструктивных параметров при действии на нее равномерного внешнего давления. Для моделирования использован программный комплекс SolidWorks. Получены зависимости коэффициента концентрации напряжений в вершине выреза от соотношения размеров выреза и толщины арки, а также ее радиуса. Показано, что замена в упрощенном расчете арки с вырезом на сплошную арку, имеющую уменьшенную на радиус выреза высоту профиля, не дает представления о реальном распределении усилий и перемещений и приводит к неадекватным расчетам. Упрощенную модель можно использовать для предварительных расчетов только с учетом поправочных коэффициентов, рассчитанных в работе.

Ключевые слова: круговая арка, вырез, концентрация напряжений, упрощенная модель.

DOI: 10.32434/2521-6406-2019-5-1-43-53

Настоящую работу мы хотели бы посвятить памяти нашего друга и коллеги, кандидата физико-математических наук, доктора технических наук, профессора Бараненко Валерия Алексеевича, известного ученого в области динамического программирования, нечеткого моделирования и оптимизации механических конструкций, в работах которого впервые были рассмотрены подобные задачи [1].

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными практическими задачами

Известно, что в современной промышленности и строительстве широкое применение

находят элементы несущих конструкций типа балок и арок [1]. В результате силовых воздействий в таких элементах возникают неравномерные поля напряжений, без детального изучения которых невозможно обеспечить прочность и надежность работы всей конструкции. Конструкции, моделирование которых сводится к схеме круговой арки, широко применяются в сложных сооружениях типа плотин и перекрытий, при проектировании силовых элементов в авиа- и судостроении [2,3]. В строительстве арки применяются при возведении мостов, павильонов, крытых рынков, ангаров, спортивных залов и

других строений большой площади. Расход материала при сооружении арки оказывается значительно меньше, чем при создании балочных и рамных систем, при этом арки просты в изготовлении и монтаже.

Для решения различных технологических задач в толщине арки часто необходимо предусмотреть вырезы [2–4]. При нечетком моделировании или при выборе рациональных параметров конструкции необходимо делать множественные пересчеты упругого изгиба арки, поэтому в таких задачах принято использовать упрощенные схемы расчета для уменьшения времени компьютерного моделирования при сохранении точности [1,5,6]. Таким образом, корректный упрощенный расчет арки с вырезом представляет существенный практический интерес.

Анализ публикаций, выделение нерешенных частей проблемы

Проблеме расчета арок, в том числе ослабленных вырезами и отверстиями, посвящено множество работ [1,3–13]. К сходным задачам приводится расчет осесимметричных оболочек при действии давления и решение плоских задач теории упругости [7,10,14,15]. Расчеты и эксперименты, проведенные в рассматриваемых работах, показывают, что арка деформируется неоднородно. Основное внимание авторами уделяется вопросу крепления концов арки при отсутствии вырезов [15] и оптимизации формы выреза при его наличии [3–6,11]. Главным фактором, обуславливающим разрушение конструкции при устойчивом деформировании, является концентрация напряжений [3–5,7].

Анализ работ показывает, что используемые упрощенные схемы [7–10] часто не учитывают особенности деформирования арки с вы-

резами, концентрацию напряжений в таких конструкциях и изменение характера их изгиба по сравнению с цельной аркой. Особенно ярко такие особенности проявляются в арках, имеющих относительно большую высоту профиля в радиальном направлении, то есть для арки-стенки и облегченной арки из сварных листов [6,7], и требуют дополнительного более подробного рассмотрения.

Формулирование целей статьи и постановка задачи

Задачей настоящей работы является анализ возможности замены расчетной схемы арки с круговым вырезом эквивалентной аркой без выреза меньшей толщины. С этой целью в работе проведен плоский расчет упругой круговой металлической арки в виде полукольца, такой же арки с центральным полукруглым вырезом [12–14], а также арки без выреза с высотой сечения, равной разности высоты сечения исходной арки и радиуса выреза при действии на них равномерного внешнего давления. Выбор в качестве нагрузки равномерного внешнего давления обусловлен наиболее характерной формой использования арок.

Изложение основного материала исследования

Соотношение конструктивных параметров варьировалось в следующих пределах: радиус арки R принимался равным 10 м, высота сечения h – 1 м и 2 м; радиус выреза r изменялся от $0,05h$ до $0,5h$; высота сечения приведенной арки принималась равной $h-r$. Схема арок при $h=1$ м и $r=0,5$ м, использованная для моделирования, приведена на рис. 1.

Рассматривалось равномерное внешнее давление интенсивностью 500 Па, приложенное к внешней границе арки. Материал арки – легированная конструкционная сталь марки 20ХГСА,

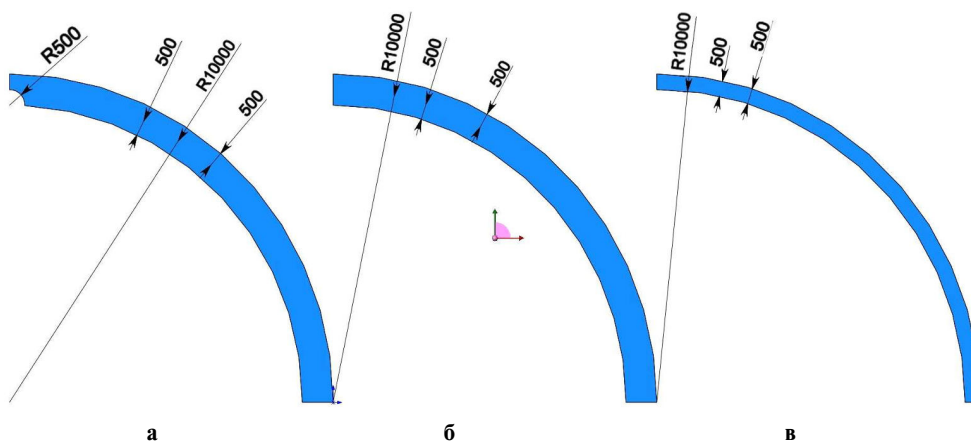


Рис. 1. Геометрическая схема расчета арок: а – с вырезом (модель I), б – без выреза (модель II), в – приведенная (модель III)

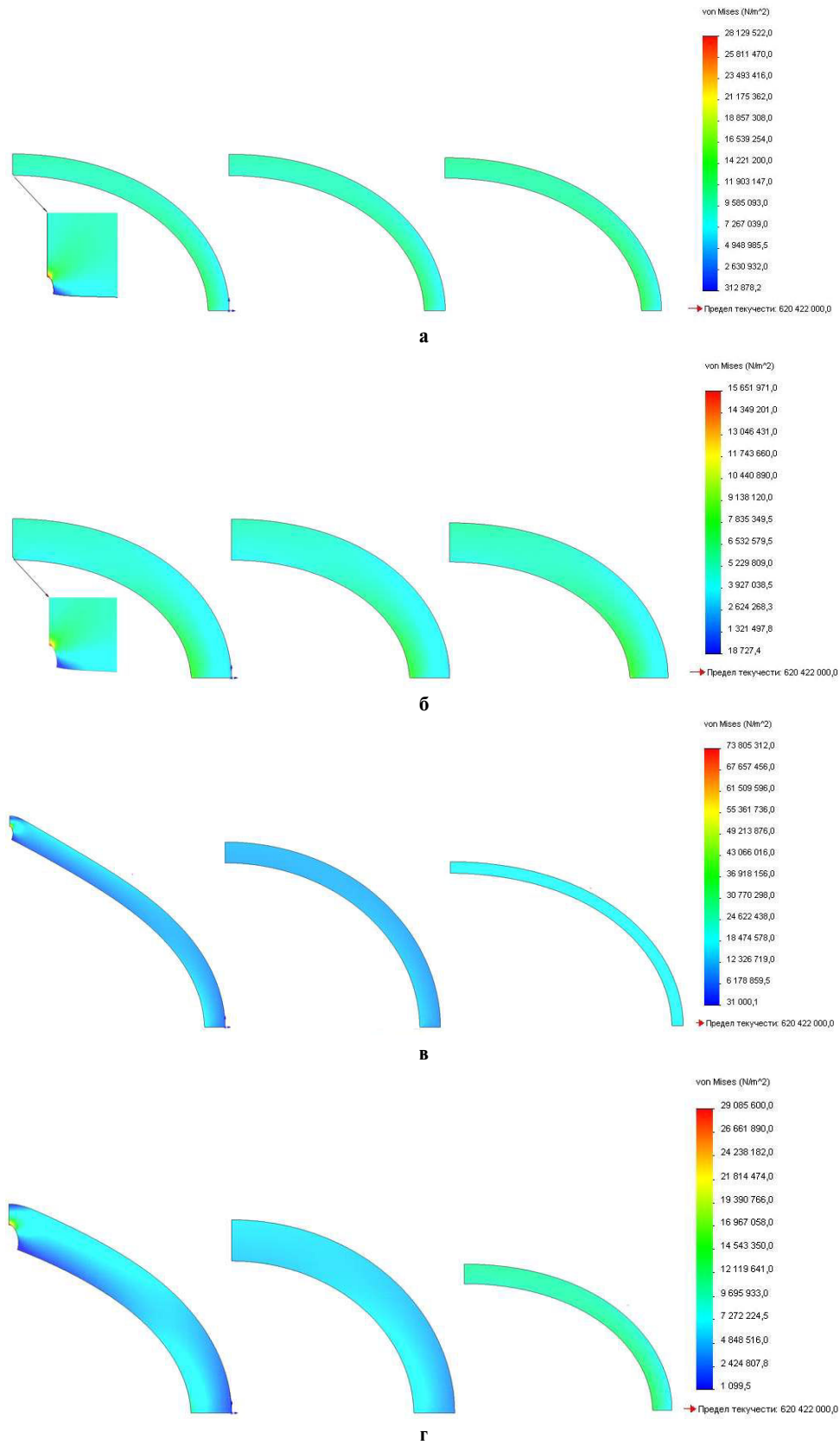


Рис. 2. Напряжения по Мизесу в упругих арках:
 а – $r=0,05h$, $h=1$ м; б – $r=0,05h$, $h=2$ м; в – $r=0,5h$, $h=1$ м; г – $r=0,5h$, $h=2$ м

модуль Юнга $2,1 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести 0,62 ГПа, коэффициент Пуассона 0,28. Нижний срез арки жестко заделан или шарнирно оперт, а верхний имеет скользящую в вертикальном направлении жесткую заделку, что соответствует условиям симметрии полукруглой арки. Для моделирования использован программный комплекс SolidWorks [16]. Сетка генерировалась автоматически, перестраивалась адаптивно к форме объекта, минимальное количество элементов вдоль участка дуги арки составляло 36, максимальный размер ячейки составлял 25 мм. Расчет производился со сгущением сетки до достижения заданной точности. Напряжения по Мизесу [17] и перемещения приведены на рис. 2–10.

На рисунках показана утрированная форма деформированной арки (перемещения увеличены в 200 раз), порядок расположения объектов на рисунках соответствует расположению их на рис. 1 (в дальнейшем будем называть их модели I, II и III).

Анализ результатов расчета при жесткой заделке нижнего конца арок (рис. 2–7) показывает, что напряжения и перемещения неоднородны как по длине арки, так и по высоте ее сечения. Поведение арки с вырезом и без него существенно отличаются между собой.

У арки без выреза максимальные напряжения достигаются с внутренней стороны сечения в зоне заделки (рис. 2,а, рис. 2,б).

У арки с вырезом в этой области также имеется значительная концентрация напряжений, но максимальные напряжения достигают-

ся в вершине выреза (рис. 2,в, рис. 2,д). Несмотря на то, что такие напряжения достигаются лишь в очень малой области сечения (на рис. 2,а, рис. 2,б зона концентрации напряжений увеличена и указана стрелкой), расчет арки с учетом пластических свойств материала показывает увеличение зоны пластического деформирования при увеличении нагрузки (рис. 3). Это означает, что разрушение наступает именно в зоне концентрации максимальных напряжений в вершине выреза.

Сравнение полей перемещений, абсолютные значения которых приведены на рис. 4–6, позволяет сделать вывод о смене характера прогиба арки с вырезом при увеличении радиуса выреза:

- для малых значений радиуса выреза $0,05h \leq r \leq 0,3h$ характерна форма деформирования с максимумом в зоне вершины арки (или верхнем конце рассматриваемой четверти арки) (рис. 4). Такая форма деформирования близка к перемещениям арки без выреза (модели II, III);

- с увеличением радиуса выреза в диапазоне $0,4h \leq r \leq 0,5h$ зона максимальных перемещений удаляется от верхнего среза (рис. 6);

- значение $0,3h \leq r \leq 0,4h$ является переходным от одного типа изгиба к другому (рис. 5).

Изменение характера деформирования связано с уменьшением сопротивления в зоне выреза и перестройкой напряженного состояния в форму с увеличением концентрации напряжений в вершине выреза. Это изменение характеризует переход выреза из фактора локальной прочности к виду конструктивного элемента, изменяющего характер деформирования объекта как единого целого.

Расчет коэффициента концентрации напряжений K в арке с вырезом (модель I) и приведенной арки без выреза (модель III) по сравнению с максимальными напряжениями исходной арки без выреза (модель II) для случая жесткой заделки нижнего торца приведены на рис. 7,а. На рис. 7,б приведены коэффициент отношения амплитуд максимальных перемещений k в арке с вырезом (модель I) и в приведенной арке без выреза (модель III) по сравнению с максимальными напряжениями исходной арки без выреза (модель II) для случая жесткой заделки нижнего конца арок.

На графиках четко видно качественное изменение, соответствующее диапазонам смены характера деформирования арки с вырезом.

Расчет арок с шарнирной заделкой нижнего торца приведен на рис. 8–9 и качественно

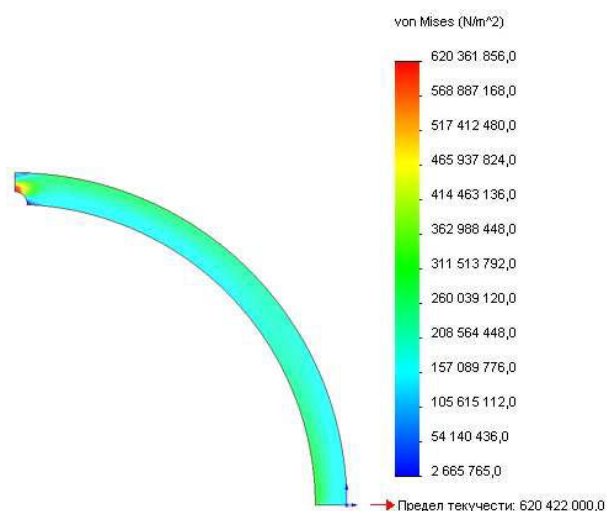


Рис. 3. Напряжения по Мизесу в арках с большим вырезом при расчете пластического деформирования ($r=0,5h$, $h=2$ м)

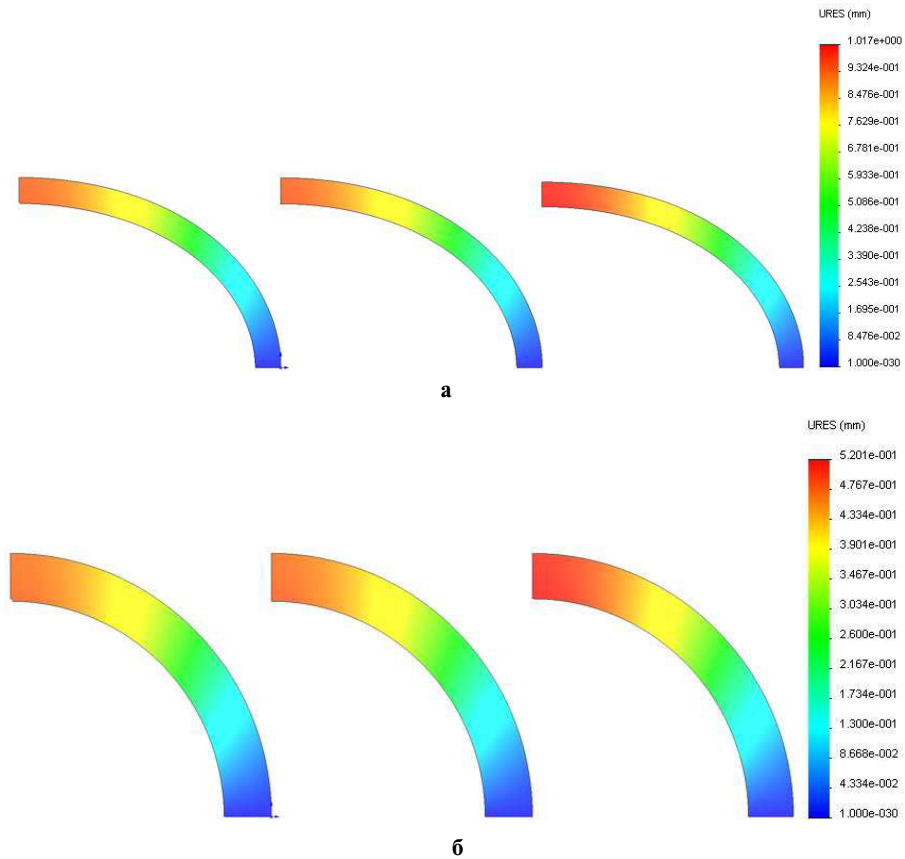


Рис. 4. Амплитуды перемещения в арках с малым вырезом $r=0,05h$: а – $h=1$ м; б – $h=2$ м

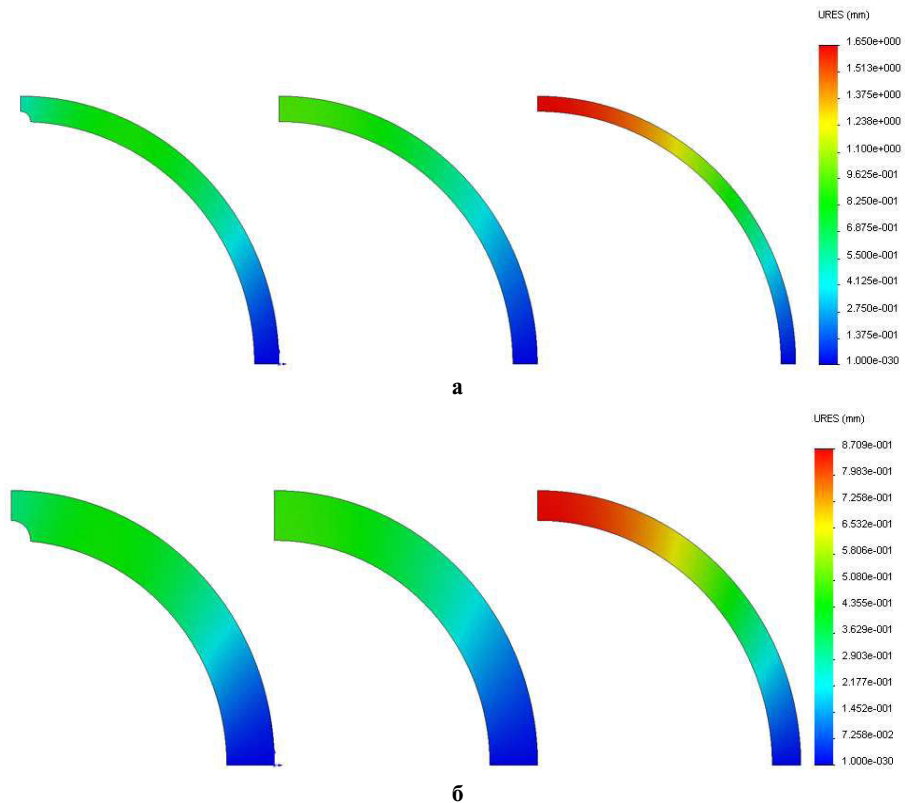


Рис. 5. Амплитуды перемещения в арках с вырезом $r=0,4h$: а – $h=1$ м; б – $h=2$ м

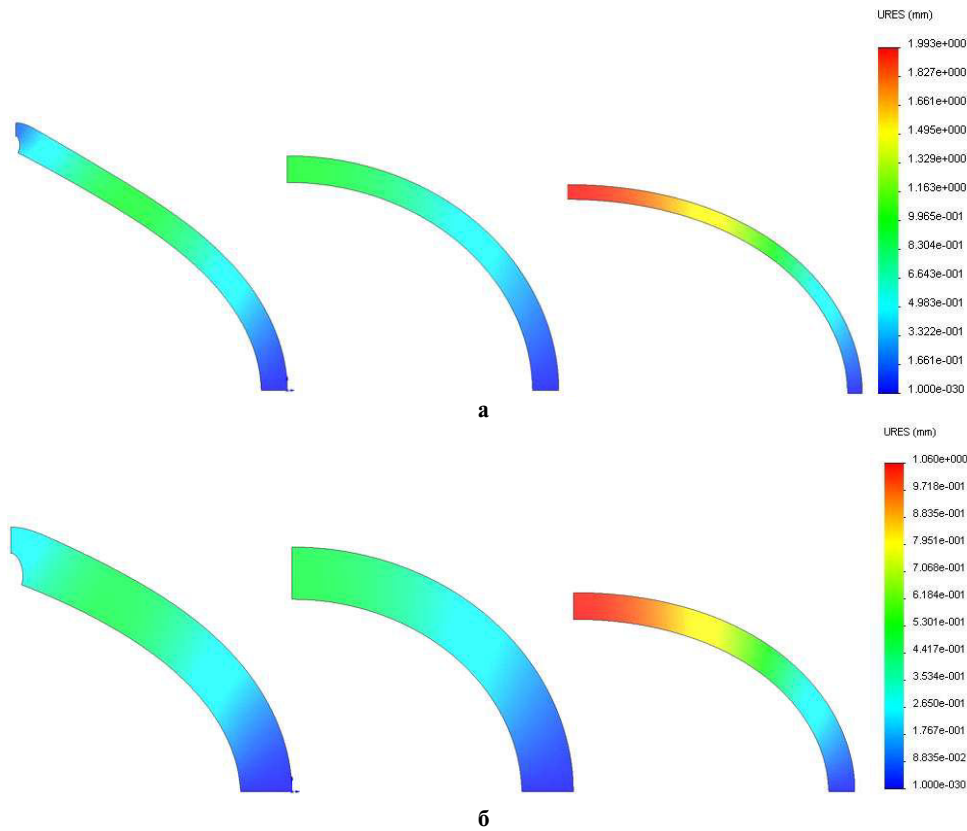


Рис. 6. Амплитуды перемещения в арках с большим вырезом $\gamma=0,5h$: а – $h=1$ м; б – $h=2$ м

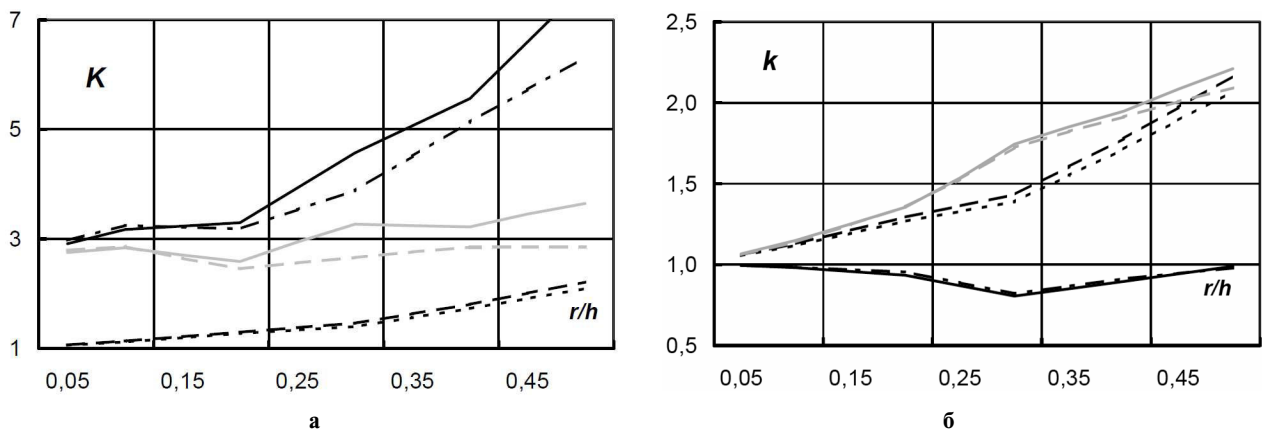


Рис. 7. Соотношения максимальных значений параметров моделей: а – напряжения, б – перемещения (сплошная черная линия – I к II, $h=1$ м, штрихпунктирная линия – I к II, $h=2$ м, штриховая черная линия – III к II, $h=1$ м, пунктирная линия – III к II, $h=2$ м, сплошная серая линия – I к III для напряжений и III к I для перемещений, $h=1$ м, штриховая серая линия – I к III для напряжений и III к I для перемещений)

мало отличается от случая жесткой заделки.

Расчет коэффициента концентрации напряжений K в арке с вырезом (модель I) и приведенной арки без выреза (модель III) по сравнению с максимальными напряжениями исходной арки без выреза (модель II) для случая шарнирной заделки нижнего торца приведены на рис. 10,а. На рис. 10,б приведены коэффициен-

ты отношения амплитуд максимальных перемещений k в арке с вырезом (модель I) и в приведенной арке без выреза (модель III) по сравнению с максимальными напряжениями исходной арки без выреза (модель II) для случая шарнирной заделки нижнего конца арок.

В [18] приведены значения коэффициента концентрации нормальных напряжений для чи-

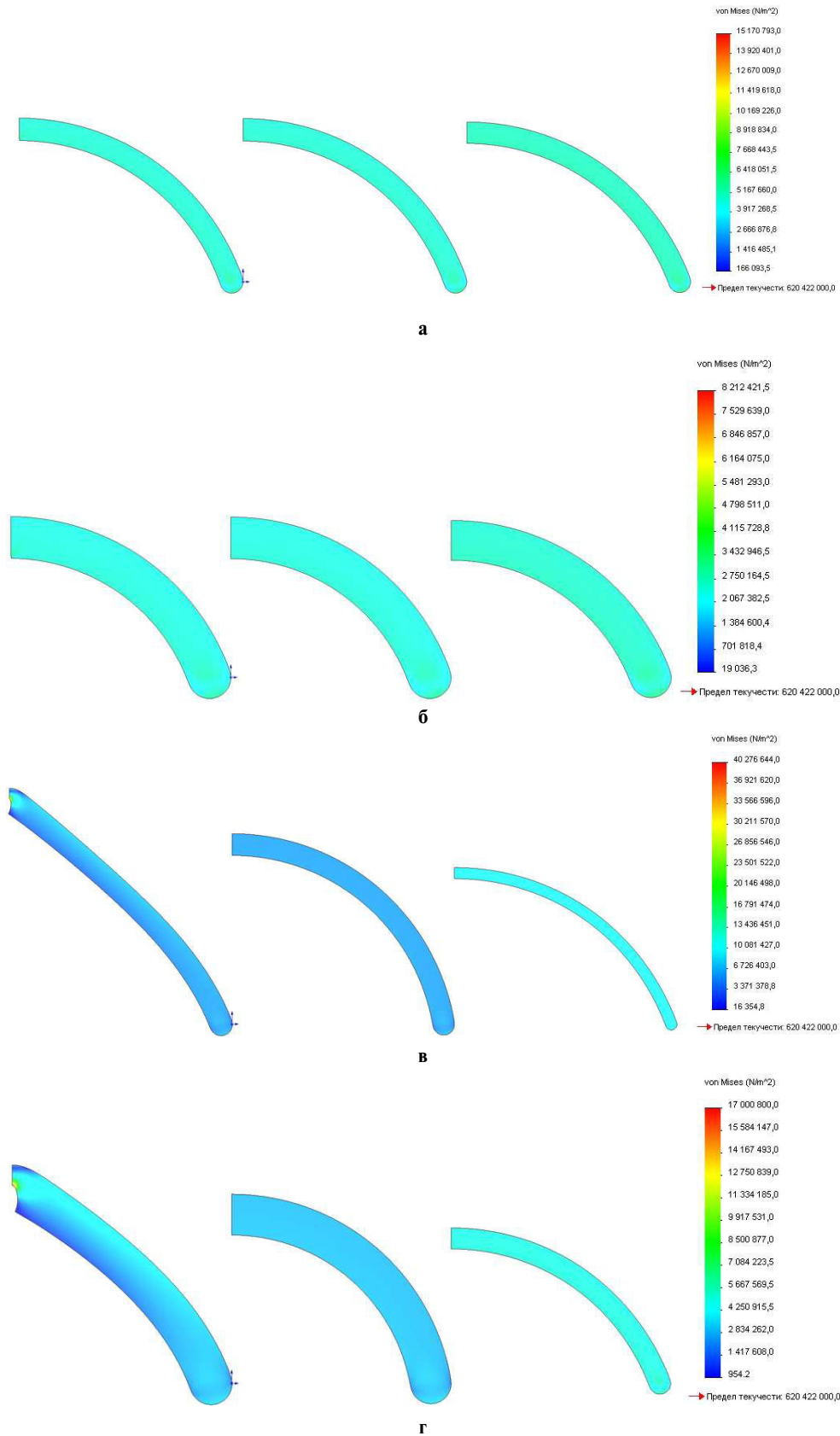


Рис. 8. Напряжения по Мизесу в упругих арках:
 а – $r=0,05h$, $h=1$ м; б – $r=0,05h$, $h=2$ м; в – $r=0,5h$, $h=1$ м; г – $r=0,5h$, $h=2$ м

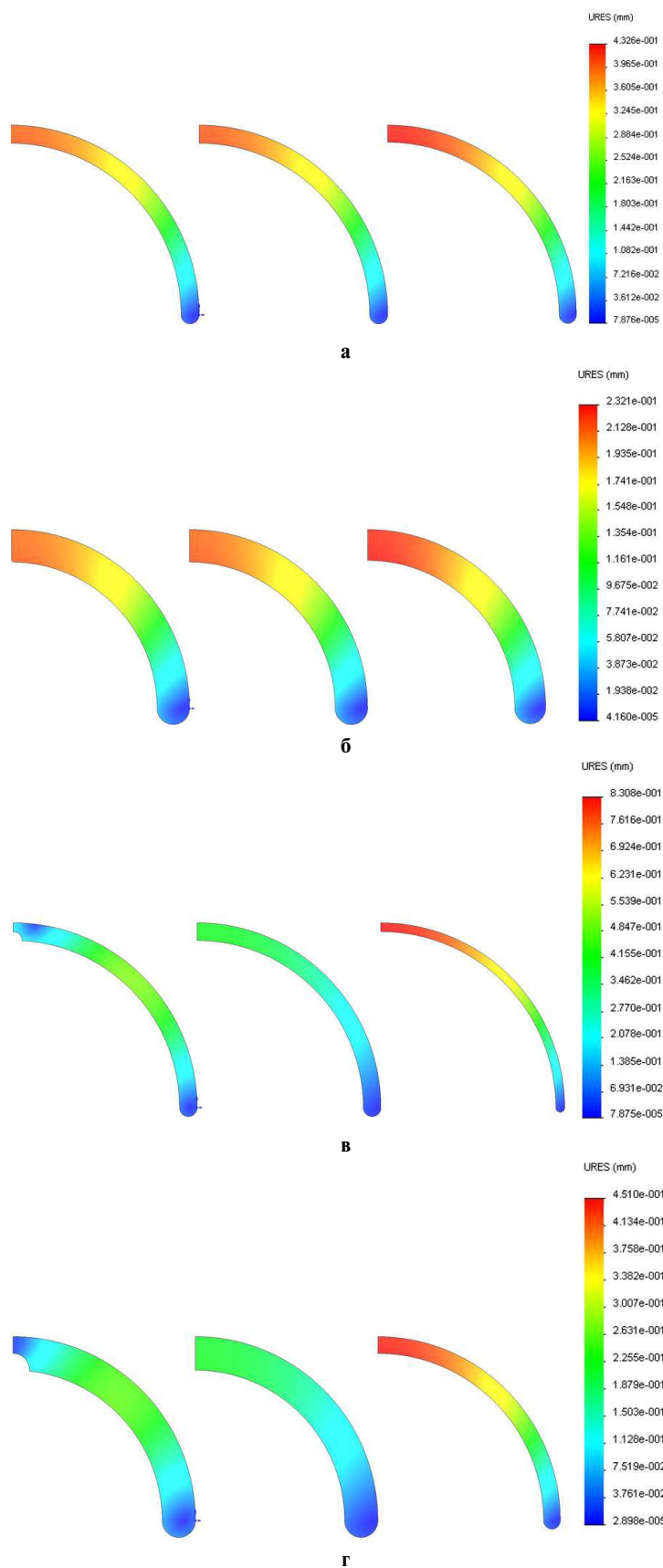


Рис. 9. Амплитуды перемещения в арках: а – $r=0,05h$, $h=1$ м; б – $r=0,05h$, $h=2$ м; в – $r=0,5h$, $h=1$ м; г – $r=0,5h$, $h=2$ м

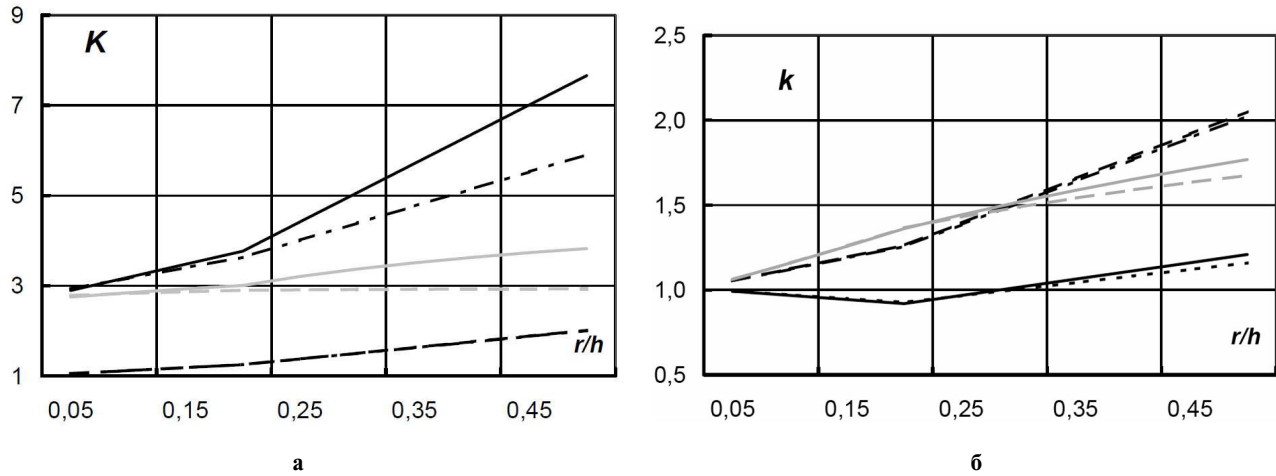


Рис. 10. Соотношения максимальных значений параметров моделей: а – напряжения, б – перемещения (сплошная черная линия – I к II, h=1 м, штрихпунктирная линия – I к II, h=2 м, штриховая черная линия – III к II, h=1 м, пунктирная линия – III к II, h=2 м, сплошная серая линия – I к III для напряжений и III к I для перемещений, h=1 м, штриховая серая линия – I к III для напряжений и III к I для перемещений)

стого изгиба бесконечной полосы с односторонним полукруглым вырезом в ее плоскости. Сравнение результатов расчета с данными [18] показывает, что для арки коэффициент концентрации напряжения по сравнению с номинальным, полученным для приведенной арки без выреза, выше примерно на 20%, чем для полосы. Это естественно, поскольку в [18] не учитывается кривизна и конечный объем конструкции. Кроме того, в [18] не приведены данные для вырезов в диапазоне $0,3h \leq r \leq 0,5h$, а такие вырезы наиболее часто используются при изготовлении технологических отверстий в облегченных арках.

Основываясь на данных расчета для рассматриваемого вида нагрузки можно предложить следующие приближенные формулы для определения мажорирующих коэффициентов K концентрации приведенных по Мизесу напряжений в следующем виде:

$$K=3 \text{ для } 0,05h \leq r \leq 0,2h,$$

$$K=3,2+2,5(r/h) \text{ для } 0,25h \leq r \leq 0,5h.$$

При расчете деформирования арки следует также принимать коэффициент k увеличения максимальных перемещений для приведенной арки по формуле

$$K=1,06+2,5(r/h).$$

Применение указанных коэффициентов

позволяет производить приближенный предварительный расчет арки с вырезом при действии внешнего давления и значительно снижает объем необходимых расчетов при варьировании параметров. При этом следует помнить, что расположение критических точек максимальных напряжений и перемещений у приведенной арки и арки с вырезом отличается. Это особенно важно при проведении оптимизации конструкции с кинематическими ограничениями и, в частности, методом динамического программирования [1].

Выводы

В работе проведен плоский расчет упругой круговой металлической арки с центральным полукруглым вырезом с различным соотношением конструктивных параметров при действии на нее равномерного внешнего давления. Для моделирования использован программный комплекс SolidWorks. Получены зависимости коэффициента концентрации напряжений в вершине выреза от соотношения размеров выреза и толщины арки, а также ее радиуса. Показано, что замена в упрощенном расчете арки с вырезом на сплошную арку, имеющую уменьшенную на радиус выреза высоту профиля, не дает представления о реальном распределении усилий и перемещений и приводит к неадекватным расчетам. Для предварительных расчетов можно использовать упрощенную модель только с учетом поправочных коэффициентов, рассчитанных в работе.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Почтман Ю.М., Бараненко В.А. Динамическое программирование в задачах строительной механики. – М.: Стройиздат, 1975. – 112 с.
2. Эйгенсон С.Н., Корихин Н.В., Головин А.И. Экспериментальное исследование напряженного состояния некоторых ответственных конструкций крупных гидроэнергетических сооружений // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – № 1 (45). – С.59-70.
3. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. – М.: Наука, 1981. – 142 с.
4. Конструктивно-технологические методы повышения усталостной долговечности элементов конструкции планера самолета в зоне функциональных отверстий / Кива Д.С., Кривов Г.А., Семенцов В.Ф. и др. – Киев: КВИЦ, 2015. – 188 с.
5. Дукарский Ю.М., Михайлова О.В. Оптимизация конструктивного решения и анализ напряженного состояния стальных балок с перфорированной стенкой // Сб. материалов НТК МГУП. – М.: МГУП, 2002. – С.82-84.
6. Лаврова А.С. Совершенствование методов расчета перфорированных балок с круглыми вырезами с помощью конечно-элементного анализа и моделирования: Дис..канд. техн. наук: 05.23.01. – Калининград: Калининградский государственный технический университет, 2018. – 167 с.
7. Вайнберг Д.В. Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек. – Киев: Техника, 1969. – 220 с.
8. Власов А.Н., Соватарова В.Л., Талонов А.В. Описание физических процессов в структурно неоднородных средах. – М.: РУДН, 2009. – 258 с.
9. Григolloк Э. И. Напряженное состояние вблизи отверстий // Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек. – М.: МГУ, 1981. – С.226-237.
10. Колтаков А.Г. К расчету пластины с локальным возмущением формы // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 4. – С. 171-182.
11. Притыкин А.И. Концентрация напряжений во флорах с круглыми и овальными вырезами // Вестник АГТУ. Сер. Морская техника и технология. – 2009. – № 1. – С.76-81.
12. Саленко С.Д., Шевченко С.С. Снижение концентрации напряжений в окрестности одностороннего выреза в пластине // Судостроение. – 2013. – № 5 (820). – С.32-33.
13. Zhang L.L., Yang Z., Hou J., Wang Z. Q. The Stress and Strain Concentrations in Curved Beams of Finite Thickness with End Moments // Advanced Materials Research. – 2011. – Vols. 163-167. – P.2953-2963.
14. Семенов-Ежов И.Е., Ширишов А.А. Концентрация напряжений в толстостенных цилиндрических оболочках и корпусных деталях при действии давления // Инженерный вестник. – 2015. – № 5. – С.1-12.
15. Savin G.N. The stress distribution in a thin shell with

an arbitrary hole // Problems of Continuum Mechanics. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1961. – P. 382-405.

16. Алямовский А.А. SolidWorks Simulation. Инженерный анализ для профессионалов: задачи, методы, рекомендации. – М.: ДМК Пресс, 2015. – 562 с.

17. Monchiet V., Kondo D., Charkaluk E., Oana C. Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol. 24 (7). – P.1158-1189.

18. Pilkey W.D. and Pilkey D.F. Peterson's Stress Concentration Factors, Third Edition. – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2008. – 522 p.

Поступила в редакцию 13.05.2019

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЗГІНУ ПРУЖНОЇ КРУГОВОЇ АРКИ З ВИРІЗОМ

Олевський В.І., Олевський О.В.

Конструкції, моделювання яких зводиться до схеми кругової арки, широко застосовуються в складних спорудах типу гребель і перекриттів, при проектуванні силових елементів в авіа- і суднобудуванні. Для вирішення різних технологічних завдань у товщині арки часто необхідно передбачити вирізи. При цьому при виборі раціональних параметрів конструкції необхідно робити множинні перерахунки пружного вигину арки, тому в задачах оптимізації конструкції прийнято використовувати спрощені схеми розрахунку. Такі схеми часто не враховують особливості деформування арки з вирізами, концентрацію напружень в таких конструкціях і зміну характеру їх вигину в порівнянні з цілісною аркою. Найбільш яскраво такі особливості проявляються в арках, що мають відносно велику висоту профілю в радіальному напрямку. До таких моделей зводиться розрахунок арки-стілки і полегшеної арки зі зварних листів. В роботі виконано плоский розрахунок пружної кругової металеві арки з центральним напівкруглим вирізом з різним співвідношенням розмірів вирізу і товщини арки, а також її радіуса. Показано, що заміна в спрощеному розрахунку арки з вирізом на суцільну арку, що має зменшену на радіус вирізу висоту профілю, не дає уявлення про реальний розподіл зусиль і переміщень і призводить до неадекватних розрахунків. Спрощену модель можна використовувати для попередніх розрахунків тільки з урахуванням поправочних коефіцієнтів, розрахованих в роботі.

Ключові слова: кругова арка, виріз, концентрація напружень, спрощена модель.

SOME PECULIARITIES OF COMPUTER MODELING OF A BENDING OF ELASTIC CIRCULAR ARCH WITH NOTCH

Olevskiy V.I.^a, Olevskiy O.V.^b

^a Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro, Ukraine

^b Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine

Structures, the modeling of which is reduced to the circular arch scheme, are widely used in complex structures such as dams and ceilings, in the design of load-bearing elements in aircraft and shipbuilding. To solve various technological problems it is often necessary to provide cuts in the thickness of the arch. In this case, when choosing rational parameters of a structure, it is necessary to make multiple recalculations of the elastic bend of the arch; therefore, it is a common practice to use simplified calculation schemes in the problems of structure optimization. Such schemes often do not take into account peculiarities of deformation in an arch with cutouts, stress concentration in such structures, and change in the nature of their bending compared to a solid arch. Such features are especially vividly manifested in arches with a relatively large profile height in a radial direction. Calculation of arch-walls and lightweight arches of welded sheets is reduced to such models. A flat calculation of an elastic circular metal arch with a central semicircular cutout with a different ratio of design parameters under the action of uniform external pressure on it was carried out. The SolidWorks software complex was used for modeling. The dependences of the stress concentration coefficient at an apex of a cutout on the ratio of the dimensions of a cutout and the thickness of an arch, as well as its radius, are obtained. It is shown that the replacement of an arch with a cutout with a solid arch, having a profile height reduced by a cutout radius, in a simplified calculation does not give an idea of the real distribution of forces and displacements and leads to inadequate calculations. The simplified model can be used for preliminary calculations only taking into account the correction factors calculated in the work.

Keywords: circular arch, cutout, stress concentration, simplified model.

REFERENCES

- Pochtman Ju.M., Baranenko V.A. *Dinamicheskoe programirovanie v zadachah stroitel'noj mehaniki* [Dynamic programming in problems of structural mechanics]. Moscow, Strojizdat, 1975, 112 p. (in Russian).
- Jejgenson S.N., Korihin N.V., Golovin A.I. *Jeksperimental'noe issledovanie naprjazhennogo sostojanija nekotoryh otvetstvennyh konstrukcij krupnyh gidrojenergeticheskikh sooruzhenij* [Experimental study of the stress state of some critical structures of large hydropower facilities]. *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*, 2014, № 1(45), pp. 59-70 (in Russian).
- Mavljutov R.R. *Koncentracija naprjazhenij v jelementah aviacionnyh konstrukcij* [Stress concentration in elements of aircraft structures]. Moscow, Nauka, 1981, 142 p. (in Russian).
- Kiva D.S., Krivov G.A., Semencov V.F. i dr. *Konstruktivno-tehnologicheskie metody povyshenija ustalostnoj dolgovechnosti jelementov konstrukcii planera samoleta v zone funkcional'nyh otverstij* [Constructive-technological methods for increasing the fatigue life of structural elements of the airframe of an airplane in the area of functional openings]. Kiev, KVIC, 2015, 188 p. (in Russian).
- Dukarskij Ju.M., Mihajlova O.V. *Optimizacija konstruktivnogo reshenija i analiz naprjazhennogo sostojanija stal'nyh balok s perforirovannoj stenкой* [Optimization of the constructive solution and analysis of the stress state of steel beams with a perforated wall]. Sb. materialov NTK MGUP, Moscow, MGUP, 2002, pp. 82-84. (in Russian).
- Lavrova A.S. *Sovershenstvovanie metodov rascheta perforirovannyh balok s kruglymi vyrezami s pomoshh'ju konechno-jelementnogo analiza i modelirovanija* [Improving methods for calculating perforated round-cut beams using finite element analysis and modeling]. Dis...kand. tehn. nauk: 05.23.01, Kaliningrad, Kaliningradskij gosudarstvennyj tehničeskij universitet, 2018, 167 p. (in Russian).
- Vajnberg D.V. *Koncentracija naprjazhenij v plastinah okolo otverstij i vykruzhek* [The concentration of stresses in the plates near the holes and fillets]. Kiev, Tehnika, 1969, 220 p. (in Russian).
- Vlasov A.N., Sovatarova V.L., Talonov A.V. *Opisanie fizicheskikh processov v strukturno neodnorodnyh sredah* [Description of physical processes in structurally inhomogeneous media]. Moscow, RUDN, 2009, 258 p. (in Russian).
- Grigoljuk Je. I. *Naprjazhennoe sostojanie vblizi otverstij* [Stress near holes]. *Nekotorye prikladnye zadachi teorii plastin i obolochek*, Moscow, MGU, 1981, pp. 226-237. (in Russian).
- Kolpakov A.G. *K raschetu plastiny s lokal'nym voz-mushheniem formy* // *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika* [To the calculation of the plate with local form perturbation]. 2012, T. 53, № 4, pp. 171-182. (in Russian).
- Pritykin A.I. *Koncentracija naprjazhenij vo florah s kruglymi i oval'nymi vyrezami* [Stress concentration in floras with round and oval cutouts]. *Vestnik AGTU. Ser. Morskaja tehnikaja i tehnologija*, 2009, no. 1, pp. 76-81. (in Russian).
- Salenko S.D., Shevchenko S.S. *Snizhenie koncentracii naprjazhenij v okrestnosti odностороннего vyreza v plastine* [The decrease in stress concentration in the vicinity of one-side cut in the plate]. *Sudostroenie*, 2013, no. 5(820), pp. 32-33 (in Russian).
- Zhang L.L., Yang Z., Hou J., Wang Z. Q. The Stress and Strain Concentrations in Curved Beams of Finite Thickness with End Moments. *Advanced Materials Research*, 2011, vols. 163-167, pp. 2953-2963.
- Semenov-Ezhov I.E., Shirshov A.A. *Koncentracija naprjazhenij v tolstostennyh cilindricheskikh obolochkah i korpusnyh detaljah pri dejstvii davljenja* [Stress concentration in thick-walled cylindrical shells and body parts under pressure]. *Inzhenernyj vestnik*, 2015, no. 5, pp. 1-12 (in Russian).
- Savin G.N. *The stress distribution in a thin shell with an arbitrary hole*. // *Problems of Continuum Mechanics*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1961, pp. 382-405.
- Aljamovskij A.A. *SolidWorks Simulation. Inzhenernyj analiz dlja professionalov: zadachi, metody, rekomendacii* [SolidWorks Simulation. Engineering analysis for professionals: objectives, methods, recommendations]. Moscow, DMK Press, 2015, 562 p. (in Russian).
- Monchiet V., Kondo D., Charkaluk E., Oana C. Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. // *International Journal of Plasticity*, 2008, Vol. 24 (7), pp. 1158-1189.
- Pilkey W.D. and Pilkey D.F. *Peterson's Stress Concentration Factors*, Third Edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008, 522 p.