

УДК 539.3

*Старовойтов Э.И., Козел А.Г.***НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ, СВЯЗАННОЙ СО СЛОЖНЫМ ОСНОВАНИЕМ****Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь**

В наше время композиционные, в том числе трехслойные, элементы конструкций нашли широкое применение в строительстве и машиностроении. Это вызывает необходимость создания соответствующих математических моделей и методов расчета их напряженно-деформированного состояния при различных условиях эксплуатации. Здесь приведена постановка краевой задачи об осесимметричном деформировании упругой трёхслойной круговой пластины на сложном основании модели Пастернака, что позволяет учитывать влияние сдвиговых свойств материала основания на напряженно-деформированное состояние исследуемой конструкции. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной линии. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине легком заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. На контуре предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительно сдвигу слоев. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Работа тангенциальных напряжений в заполнителе не учитывалась. Решение краевой задачи сведено к нахождению трех искомым функций – прогиба пластины, относительного сдвига и радиального перемещения в заполнителе. Получено общее аналитическое решение краевой задачи в функциях Бесселя. Численно исследовано влияние сдвиговых свойств основания на напряженное состояние пластины при различных коэффициентах сжатия и сдвига основания. Проведено сравнение расчетных значений перемещений и напряжений, полученных с использованием моделей Пастернака и Винклера. Показано, что учет сдвиговых свойств материала основания приводит к уменьшению расчетных параметров.

Ключевые слова: осесимметричный изгиб, трехслойная круговая пластина, коэффициенты сжатия и сдвига основания, основание Пастернака.

DOI: 10.32434/2521-6406-2018-4-2-73-80

Анализ последних исследований и публикаций

В монографиях [1–4] рассматриваются различные математические модели статического и динамического деформирования неоднородных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. В статьях [5–9] исследовано: динамическое нагружение композитных сэндвич-балок и пластин, в том числе с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев; распространение волн в слоях упругих конструкций; распределение напряжений при нестационарном контакте с подвижными границами.

Модель упругого основания с использованием двух коэффициентов постели, учитывающая его сжимаемость и связность, была предложена П.Л. Пастернаком [10] при взаимодействии с однородными элементами конструкций.

Предлагаемая работа распространяет эту модель на случай трехслойных пластин, взаимодействующих со сложным основанием Пастернака.

Постановка краевой задачи

Рассматривается осесимметричное деформирование поперечно нагруженной упругой трехслойной круговой пластины (радиуса R),

покоящейся на упругом основании (рис. 1). Для изотропных несущих слоев толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3=2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Заполнитель считается легким, т.е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительно сдвигу слоев. Решение задачи сводится к нахождению четырех неизвестных функций – радиального перемещения $u(r)$ и относительно сдвига в заполнителе $\psi(r)$, прогиба пластины $w(r)$, осадки поверхности свободного основания w_d .

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной со срединной плоскостью заполнителя. На внешние слои стержня действует распределенная нагрузка $q_0(r)$ и реакция основания, которая описывается моделью Пастернака [10]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \tag{1}$$

где $w(r)$ – прогиб пластины; κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi,$$

после интегрирования получим выражения радиальных перемещений $u_r^{(k)}$ в слоях ($k=1,2,3$ – номер слоя) через три искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} & (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} & (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \tag{2}$$

где $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение $(u - c\psi)$, z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (2) и соотношений Коши.

$$\varepsilon_r^{(1)} = u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}),$$

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi. \tag{3}$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha=r,\varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz;$$

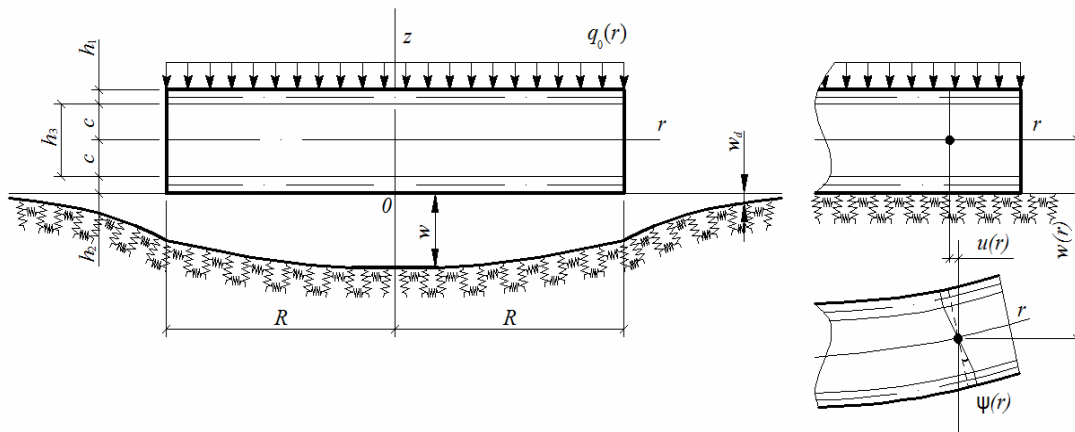


Рис. 1. Схема деформирования круговой пластины

$$M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz ;$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}) . \tag{4}$$

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получим из вариационного принципа Лагранжа [4], приравняв виртуальную работу к работе внешних и контурных усилий, с учетом равенства при любых значениях варьируемых перемещений. В результате имеем систему дифференциальных уравнений в усилиях, описывающую равновесие круговой трехслойной пластины на упругом основании Пастернака:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\phi) = 0 ;$$

$$H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\phi) = 0 ;$$

$$M_{r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\phi,r}) = -(q_0 - q_R) . \tag{5}$$

При этом на контуре пластины ($r=R$) должны выполняться силовые граничные условия: $T_r = T_r^0$, $H_r = H_r^0$, $M_r = M_r^0$, $M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = Q^0$. (6)

Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях ($k=1,2,3$) описывается соотношениями линейной теории упругости:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)}, \tag{7}$$

где $s^{(k)}$, $e^{(k)}$, $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – шаровые и девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций, G_k – модуль сдвига, K_k – модуль объемной деформации, $\theta^{(k)}$ – объемная деформация.

Подставив в (7) деформации (3) и воспользовавшись соотношениями (4), получим выражение обобщенных усилий T_α , M_α и H_α ($\alpha=r,\phi$) через три искомые функции: $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. Например, T_r , M_r будут:

$$T_r = \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} +$$

$$+ c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} -$$

$$- \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r} ,$$

$$M_r = \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} +$$

$$+ \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u_{,r}}{r} +$$

$$+ \left[cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} +$$

$$+ \left[cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} -$$

$$- \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} -$$

$$- \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} , \tag{8}$$

где $K_k + \frac{4}{3}G_k \equiv K_k^+$, $K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-$.

После подстановки обобщенных внутренних усилий и моментов δT_α , M_α и H_α ($\alpha=r,\phi$), выраженных через искомые функции в (5) и с учетом реакции основания (1), получим в перемещениях следующую систему уравнений равновесия, описывающую изгиб круговой трехслойной пластины на упругом двухпараметрическом основании Пастернака:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0 ;$$

$$L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0 ;$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q_0 , \tag{9}$$

где коэффициенты a_i и линейные дифференциальные операторы L_k определяются формулами:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+ , \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+) ;$$

$$a_3 = h_1 (c + \frac{1}{2} h_1) K_1^+ - h_2 (c^2 + \frac{1}{2} h_2) K_2^+ ;$$

$$a_4 = c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+) ;$$

$$a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right];$$

$$a_6 = h_1 (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2) K_1^+ + h_2 (c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+;$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{2g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}.$$

Краевая задача по определению перемещений в круглой пластине на основании Пастернака замыкается присоединением к (9) силовых (6) или кинематических граничных условий. В частности, при жёсткой заделке контура пластины должны выполняться требования ($r=R$):

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0. \tag{10}$$

При шарнирном опирании контура пластины:

$$u = \psi = w = 0, \quad M_r = 0. \tag{11}$$

В случае свободного контура пластины:

$$\psi = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0, \tag{12}$$

где внутренние усилия T_r , M_r определяются формулами (8).

Общее решение краевой задачи

Рассмотрим процедуру решения этой системы уравнений. С помощью первых двух уравнений системы (13) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ . После двукратного интегрирования и некоторых преобразований получим:

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r};$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r};$$

$$w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - t_f D (w_{,rr} + \frac{1}{x} w_{,r}) + \kappa_0 D w = q_0 D, \tag{13}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования,

определяемые из граничных условий (10)–(12); коэффициенты $q = q_0 D$, $2t_0^2 = t_{f1} / \kappa^2$,

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_6}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Получим решение однородного уравнения, соответствующего третьему уравнению в (13). Для этого приравняем левую часть уравнения нулю и введем замену переменной $x = \kappa r$. В результате приходим к уравнению вида

$$w_{,xxxx} + \frac{2}{x} w_{,xxx} - \frac{1}{x^2} w_{,xx} + \frac{1}{x^3} w_{,x} - 2t_0^2 (w_{,xx} + \frac{1}{x} w_{,x}) + w = 0$$

или в операторном виде:

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 w + w = 0, \tag{14}$$

где $2t_0^2 = t_{f1} / \kappa^2$, $t_{f1} = t_f D$, $\kappa^4 = \kappa_0 D$,

$$\Delta w(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dw}{dx} \right).$$

Уравнение (14) может быть приведено к системе эквивалентных ему двух уравнений второго порядка. Пусть $w = w(x)$ – некоторое частное решение однородного уравнения (14), удовлетворяющее в то же время уравнению:

$$\Delta w + \lambda w = 0, \tag{15}$$

где λ – константа, подлежащая определению.

Исходя из уравнения (15), имеем:

$$\Delta w = -\lambda w, \tag{16}$$

$$\Delta^2 w = \lambda^2 w.$$

Подставив теперь выражения (16) в исходное уравнение (14), получим относительно w характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2t_0^2 \lambda + 1 = 0. \tag{17}$$

Значения корней уравнения (17) определяются формулами:

$$\lambda_1 = -t_0^2 + \sqrt{(t_0^2)^2 - 1};$$

$$\lambda_2 = -t_0^2 - \sqrt{(t_0^2)^2 - 1} \quad (18)$$

Следует отметить, что если в качестве упругого основания рассматриваются реальные грунты, то значение интегральной характеристики t_0 находится в пределах $0 \leq t_0^2 \leq 1$ [11]. Случай $t_0^2 = 0$ соответствует отсутствию сдвига в упругом основании и $t_f = 0$.

Таким образом, корни характеристического уравнения (18) можно рассматривать как комплексно сопряженные величины:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a = -a_1 + ib_1, \\ \lambda_2 &= \bar{a} = -a_1 - ib_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где $a_1 = t_0^2$, $b_1 = \sqrt{1 - (t_0^2)^2}$.

Из уравнения (16), следует, что двум комплексно сопряженным корням (19) соответствуют два линейно независимых уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} w_{1,xx} + \frac{1}{x} w_{1,x} + a w_1 &= 0, \\ w_{2,xx} + \frac{1}{x} w_{2,x} + \bar{a} w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Общий интеграл основного дифференциального уравнения (13) можно представить в виде:

$$w = w_1 + w_2 + w_p, \quad (21)$$

где w_p – частное решение уравнения (13), w_1 и w_2 – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая уравнениям (20).

Решение уравнений (21) можно записать в виде [12]:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= C_5 J_0(\sqrt{ax}) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}); \\ w_2(x) &= C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}x}) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}), \end{aligned} \quad (22)$$

где $J_0(\sqrt{ax})$, $J_0(\sqrt{\bar{a}x})$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов \sqrt{ax} и $\sqrt{\bar{a}x}$; $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Используя решение (22), перепишем общее решение (21) в окончательной форме:

$$w = C_5 J_0(\sqrt{ax}) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}x}) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) + w_p. \quad (23)$$

Случай равномерно распределенной нагрузки

Рассмотрим расположенную на упругом однослойном основании круглую трёхслойную пластину радиуса R, находящуюся под действием равномерно распределённой нагрузки $q_0 = \text{const}$. Дифференциальное уравнение изгиба (13) для такой пластины может быть записано в виде:

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = \frac{q_0}{\kappa_0} \quad (24)$$

В области внешней по отношению к пластине справедливо однородное дифференциальное уравнение, которое имеет вид [11]:

$$\Delta w_d - \alpha_0^2 w_d = 0, \quad (25)$$

где $\alpha_0^2 = \frac{\kappa_0}{t_f \kappa^2} = \frac{\sqrt{\kappa_0}}{t_f \sqrt{D}} = \frac{\kappa^2}{t_f D}$.

Тогда общее решение (23), с учетом частного решения (24), и решение уравнения (25), могут быть представлены в виде:

$$w = C_5 J_0(\sqrt{ax}) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}x}) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) + \frac{q_0}{\kappa_0}, \quad (26)$$

$$w_d = C_9 I_0(\alpha_0 x) + C_{10} K_0(\alpha_0 x),$$

где $I_0(\alpha_0 x)$, $K_0(\alpha_0 x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода (функция Макдональда) нулевого порядка аргумента $\alpha_0 x$.

Функция $I_0(\alpha_0 x)$ при $x \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, что противоречит условию затухания осадок упругого основания вдали от места приложения нагрузки ($w_d \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$), то необходимо положить $C_9 = 0$.

Общее решение дифференциальных уравнений для прогиба и осадки (26) и остальные искомые функции системы (13), с учетом ограниченности решения в начале координат ($C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 0$), в этом случае могут быть представлены в виде:

$$u = -kb_1 (C_5 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 \sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}} \kappa r)) + C_{11} r;$$

$$\psi = -kb_2 (C_5 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 \sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}} \kappa r)) + C_{12} r;$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}} \kappa r) + \frac{q_0}{\kappa_0};$$

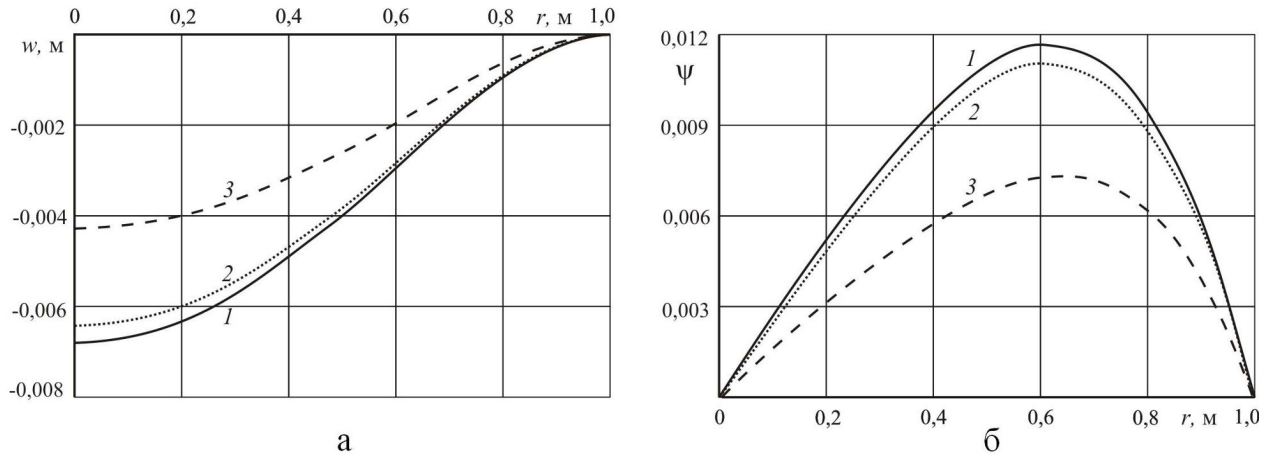


Рис. 2. Изменение прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса пластины при коэффициенте жёсткости основания $k_0=100$ МПа/м

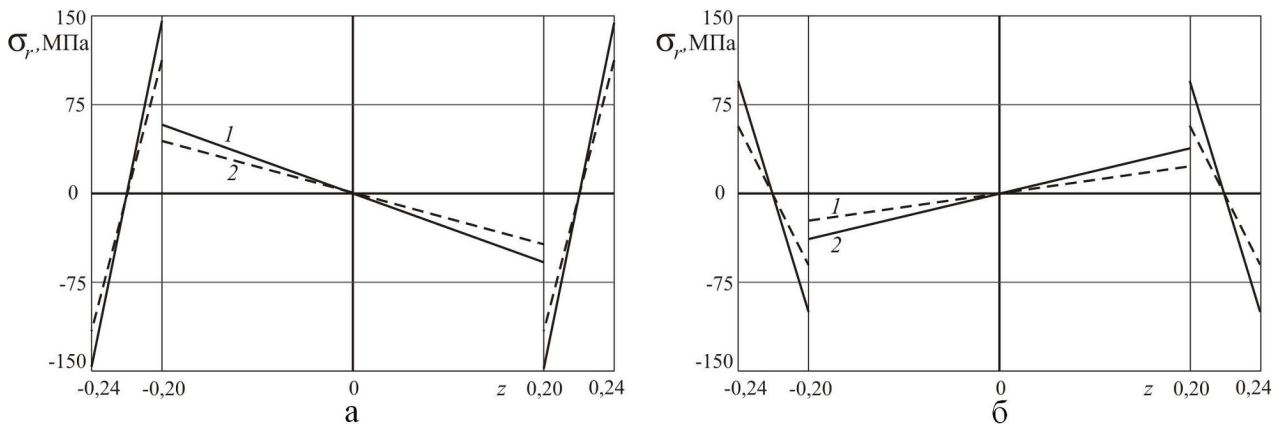


Рис. 3. Изменение радиальных напряжений σ_r по толщине на контуре и в центре пластины ($k_0=100$ МПа/м)

$$w_d = C_{10} K_0 (\alpha_0 x),$$

где q_0/k_0 – частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения (24); C_1, C_3, C_5, C_7 – произвольные постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (10)–(12).

Численные результаты

Численный параметрический анализ проведен для защемленной по контуру пластины единичного радиуса $R=1$ м, слои которой набраны из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т [13]. Принимались: величина интенсивности поверхностной нагрузки $q_0=-1$ МПа; толщины слоёв $h_1=h_2=0,04$ м, $h_3=0,4$ м; отношение коэффициентов, согласно рекомендациям Пастернака [10], $t_f/k_0 < 1$. Градация оснований по жесткости в дальнейшем принята следующая [4]: при $k_0 \leq 30$ МПа/м – основания малой жесткости (легкие); $30 \leq k_0 \leq 650$ МПа/м – основания средней жесткости; $k_0 \geq 650$ МПа/м – основания вы-

сокой жесткости.

На рис. 2,а и 2,б показано изменение прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса рассматриваемой пластины при основании средней жесткости ($k_0=100$ МПа/м) и различных коэффициентах сдвига основания t_f (МПа·м): 1 – $t_f=0$ (этот случай соответствует основанию модели Винклера), 2 – $t_f=1$, 3 – $t_f=10$. С ростом коэффициента t_f уменьшается прогиб пластины и сдвиг в заполнителе. При малых значениях $t_f < 0,1$ МПа·м изменения не существенные, и сдвиговой деформацией основания можно пренебречь. При увеличении коэффициента сдвига до 1 МПа·м прогиб уменьшается на 5%, в случае $t_f=10$ МПа·м прогиб уменьшается на 37%. Аналогично ведёт себя сдвиг в заполнителе.

На рис. 3 показано изменение радиальных напряжений $\sigma_r(z)$ по толщине пластины на её контуре (а) и в центре (б): 1 – $t_f=0$, 2 – $t_f=10$ МПа·м. Картина напряжений симметрич-

на относительно срединной поверхности заполнителя в силу симметрии пластины по толщине. В центре пластины верхние части несущих слоев сжаты, заполнителя – растянуты. На контуре наблюдается противоположная картина. В склейках слоев напряжения имеют одинаковые знаки, но терпят разрыв из-за различных упругих характеристик материалов слоев. При учёте коэффициента сдвига $t_r=10$ МПа·м напряжения уменьшаются, на контуре пластины до 29%, в центре – на 41%. В заполнителе напряжения увеличены в 10 раз.

Выводы

Учёт сдвиговых свойств упругого основания существенно уточняет картину напряжённо-деформированного состояния трёхслойной пластины, связанной с основанием Пастернака.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований РБ (проект № T18P-090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек / Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андришин В.А. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 408 с.
3. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
4. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 380 с.
5. The oblique impact response of composite sandwich plates Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. // Composite Structures. – 2015. – № 133 – P.1127-1136.
6. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // Aerospace Science and Technology. – 2016. – № 52. – P.41-51.
7. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – № 2. – P.523-541.
8. Kuznetsova E.L., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol.46. – No. 5. – P.789-787.
9. Fedotenkov G.V., Tarlakovskiy D.V. Analytic investigation of features of stresses in plane non-stationary contact problems with moving boundaries // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol.162. – No. 2. – P.246-253.
10. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 55 с.
11. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 491 с.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
13. Starovoitov É.I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials // Strength of materials. – 1988. – Vol.20. – № 4. – P.426-431.

Поступила в редакцию 20.06.2018

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН ТРИШАРОВОЇ КРУГОВОЇ ПЛАСТИНИ, ПОВ'ЯЗАНОЇ ЗІ СКЛАДНОЮ ОСНОВОЮ

Старовойтов Е.І., Козел А.Г.

У наш час композиційні, в тому числі тришарові елементи конструкцій, знайшли широке застосування в будівництві та машинобудуванні. Це викликає необхідність створення відповідних математичних моделей і методів розрахунку їх напружено-деформованого стану при різних умовах експлуатації. Тут наведена постановка крайової задачі при вісесиметричній деформації пружної тришарової кругової пластины на складній основі моделі Пастернака, що дозволяє враховувати вплив зсувних властивостей матеріалу основи на напружено-деформований стан досліджуваної конструкції. Для опису кінематики несиметричного по товщині пакета пластин прийняті гіпотези ламаної лінії. В тонких несучих шарах справедливий гіпотези Кірхгофа. У нестислому по товщині легкому заповнювачі виконується гіпотеза Тимошенко з лінійною апроксимацією переміщень по товщині шару. На контурі передбачається наявність жорсткої діафрагми, що перешкоджає відносному зсуву шарів. Система диференціальних рівнянь рівноваги отримана варіаційним методом. Робота тангенціальних напружень в заповнювачі не враховувалася. Рішення крайової задачі зведено до знаходження трьох шуканих функцій – прогину пластины, відносного зсуву і радіального переміщення в заповнювачі. Отримано загальний аналітичний розв'язок крайової задачі в функціях Бесселя. Чисельно досліджено вплив зсувних властивостей основи на напружений стан пластины при різних коефіцієнтах стиснення і зсуву основи. Здійснено порівняння розрахункових значень переміщень і напружень, отриманих з використанням моделей Пастернака і Вінклера. Показано, що облік зсувних властивостей матеріалу підстави призводить до зменшення розрахункових параметрів.

Ключові слова: тришарова кругова пластина, вісесиметричний вигин, основа Пастернака, напружений стан.

STRESS-STRAIN STATE OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE CONNECTED WITH A COMPLEX BASE

Starovoitov E.I., Kozel A.G.

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

In our time, compositional, including three-layer structural elements have found wide application in construction and mechanical engineering. This calls for the creation of appropriate mathematical models and methods for calculating their stress-strain state under various operating conditions. Here is a statement of the boundary value problem of axisymmetric deformation of an elastic three-layer circular plate on a complex basis of the Pasternak model, which allows to take into account the influence of the shear properties of the base material on the stress-strain state of the structure under study. To describe kinematics of asymmetrical on the thickness of the plate pack the hypothesis of a fractured line is adopted. In thin load bearing layers the hypotheses of Kirchhoff are true. In the incompressible lightweight filler, Tymoshenko's hypothesis with a linear approximation of displacements along the layer thickness is fulfilled. The contour assumes the presence of a rigid diaphragm that prevents the relative displacement of the layers. The system of differential equations of equilibrium is obtained by the variational method. The work of tangential stresses in the filler was not taken into account. Three types of boundary conditions are formulated. The solution of the boundary value problem is reduced to finding three required functions – plate deflection, relative shear and radial displacement in the filler. The general analytical solution of the boundary value problem in Bessel functions is obtained. The influence of shear properties of the base on the stress-strain state of the plate at different compression ratios is studied numerically. The calculated values of displacements and stresses obtained using Pasternak and Winkler models are compared. It is shown that taking into account the shear properties of the base material leads to a decrease in the calculated parameters.

Keywords: three-layer circular plate, axisymmetric bending, Pasternak foundation, stress state.

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksii* [Mechanics of laminated constructions]. Moskva: Mashinostroenie, 1980, 375 p. (in Russian).
2. Solomonov Iu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ia., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moskva: FIZMATLIT, 2014, 408 p. (in Russian).
3. Golovko K.G., Lugovoi P.Z., Meish V.F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestatsionarnykh nagruzkakh* [The dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads]. Kiev: Kievskii un-t, 2012, 541 p. (in Russian).
4. Starovoitov E.I., Yarovaya A.V., Leonenko D.V. *Deformirovanie trekhslonnykh elementov konstruksii na uprugom osnovanii* [Deformation of three-layer construction elements on the elastic foundation]. Moskva: FIZMATLIT, 2006, 380 p. (in Russian).
5. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates. Composite Structures*, 2015, no. 133, pp.1127-1136.
6. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. Aerospace Science and Technology*, 2016, no. 52, pp.41-51.
7. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. Acta Mechanica*, 2014, vol.225, no. 2, pp.523-541.
8. Kuznetsova E.L., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer. Mechanics of Solids*, 2011, vol.46, no. 5, pp.789-787.
9. Fedotenkov G.V., Tarlakovskiy D.V. *Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries. Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol.162, no. 2, pp.246-253.
10. Pasternak P.L. *Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsientov posteli* [Fundamentals of a New Method of Elastic Foundation Analysis by Means of Two-constants]. Moskva: Gos. Izd. Literatury po stroitelstvu i arkhitekture, 1954, 55 p. (in Russian).
11. Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. *Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii*. [Beams, plates, shells on the elastic foundation] – Moskva: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 1960, 491 p. (in Russian).
12. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam* [Handbook of ordinary differential equations]. Moskva: Nauka, 1976, 576 p. (in Russian).
13. Starovoitov É.I. *Description of the thermomechanical properties of some structural materials. Strength of materials*, 1988, vol.20, no. 4, pp.426-431.