УДК 519.853

Олевский В.И. [a]***, Олевская Ю.Б.*** [б]***, Науменко Т.С.*** [a]***, Шапка И.В.*** [a]

ВОПРОСЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ТИПА ПАДЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО СУММИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

[a] ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепр
[б] НТУ «Днепровская политехника», г. Днепр

Целью этой работы является разработка методики построения многомерных аппроксимаций типа Паде для решения краевых задач и определение условий их сходимости. В теории многомерных дробно-рациональных аппроксимаций функций выделяются два проблемных аспекта. Во-первых, это определение самого понятия таких аппроксимаций и способа построения приближения, а во-вторых, выбор класса приближаемых функций и доказательство сходимости выбранной схемы. Предлагается развитие теории многомерных дробно-рациональных приближений для аппроксимации степенных рядов, заданных на некоторых системах базисных функций. Подбор вида базисных функций и метода построения приближения позволяет в ряде случаев добиться существенного улучшения полезных свойств аппроксиманты для некоторых выделенных классов функций. Рассматривается создание способа построения таких многомерных дробно-рациональных приближений и определение множества коэффициентов ряда, необходимого для построения приближения заданной структуры. Определены условия сходимости аппроксимант приближаемых многомерных функций, построенных по разработанной авторами методике, при различных базисных функциях. Предложено развитие модифицированного метода продолжения по параметру на основе полученных результатов. Отличием предложенной методики является применение комбинации асимптотических методов решения краевых задач с обобщенным суммированием полученных рядов на основе многомерных аппроксимаций Паде-типа, что позволят построить альтернативные к существующим численным методам схемы решения, не уступающие им по точности. Еще одним существенным отличием является комплексность проводимых исследований – от создания метода построения приближений, обоснования его сходимости, до имплементации его в схемы решения краевых задач и создания прикладных программ. Таким образом, настоящая работа направлена на разработку новых методов расчета краевых задач математической физики и развития теории приближений функций многих переменных.

Ключевые слова: многомерная аппроксимация Паде, ряд Фурье, краевая задача, функции нескольких переменных, сходимость.

Постановка проблемы и её связь с важными научными и практическими задачами

К настоящему моменту интерес к теории дробно-рациональных приближений устойчиво возрастает в связи с широким применением их в различных исследованиях в области теоретической физики, прикладной механики, геофизики и др. [1]. Это связано с возможностью обобщенного суммирования с их использованием рядов, позволяющее осуществить продолжение аппроксимируемой функции в область мероморфности. Область сходимости полученных аппроксимант определяется кругом с центром в начале координат и радиусом, равным расстоянию до ближайшей существенно особой точки приближаемой функции, а не до произвольной ближайшей особой точки, как это справедливо для рядов. Кроме того, даже в сколь угодно малой окрестности существенно особых точек приближения Паде также сходятся, хотя и с меньшей скоростью, чем в области мероморфности. Это позволяет их использовать для повышения

© Олевский В.И., Олевская Ю.Б., Науменко Т.С., Шапка И.В., 2018

эффективности различных расчетных методов, как аналитических, так и численных.

В последнее время большой интерес уделяется расширению классической теории аппроксимации дробно-рациональными функциями на различные типы базисных функций и отличные от классического способы построения аппроксимант – аппроксимациям Паде-типа [2–6]. Специальный подбор вида базисных функций и метода построения приближения позволяет в ряде случаев добиться существенного улучшения полезных свойств аппроксиманты для некоторых выделенных классов функций [2,3]. При этом для дальнейшего практического использования требуется обоснование применения таких аппроксимант для каждого класса базисных функций на основе методов теории функций и функционального анализа [4].

Наиболее перспективным и естественным направлением развития теории приближений Паде-типа является их применение для аппроксимации функций нескольких переменных [4–6]. Использование многомерных аппроксимант Паде-типа открывает перспективы эффективного решения краевых задач математической физики для различных областей изменения переменных.

Следует отметить, что теория аппроксимации функций нескольких переменных является приоритетной областью развития современной теории функций, где в последние годы достигнуты значительные успехи [2–6]. В этом направлении работают ведущие научные школы США, европейских стран, России, Китая, Индии и др. [4–12].

Анализ публикаций, положивших начало решению нерешённых частей проблемы

Существующий уровень развития теории аппроксимации функций нескольких переменных дает возможность решить ряд фундаментальных проблем теории приближений, которые не позволяли широко использовать ее ранее. В первую очередь это касается проблемы сходимости кратных рядов с возрастанием индексов членов ряда, включенных в частичную сумму. Оценка скорости такой сходимости необходима для определения параметров усеченного ряда, используемого в практических вычислениях. В зависимости от вида целочисленного многомерного множества номеров коэффициентов ряда различают сходимость по Прингсхейму, по треугольникам, по сферам, u-сходимость и т.д. [8,9]. Следующей проблемой является определение области сходимости и скорости сходимости в пространстве независимых переменных, которая определяет точность представления аппроксимируемой функции. Еще одной проблемой при построении приближений Паде-типа для функций нескольких переменных, которая должна быть решена в процессе настоящих исследований, является неопределенность выбора множества членов кратного ряда для построения аппроксиманты заданной структуры, или невозможность такого выбора [1,7].

Кроме того, существует проблема создания эффективного метода решения задач математической физики, которая, по сути, является основной проблемой всей прикладной математики. Особую важность этой проблеме придает то, что существующие методы численного решения краевых задач во многом исчерпали себя, и требуется разработка новых подходов с гарантированной или определенной заранее сходимостью, особенно для решения усложненных неканонических задач [13].

Нами ранее получены некоторые предварительные результаты, которые определяют приоритет в рассматриваемой области и позволяют определить ход исследований. Так, получены условия сходимости кратных рядов Фурье для последовательности т.н. правильно пересчитываемых множеств [14], под определение которых подпадают практически все известные типы последовательностей множеств коэффициентов. Разработана теория оценки сходимости многомерных рядов Фурье на основании новой вариации функции нескольких переменных. Разработан и обоснован асимптотический модифицированный метод продолжения по параметру [15], предназначенный для решения краевых задач теории пластин и оболочек. Метод основан на применении многомерных приближений Паде-типа и специальной схемы их построения.

Формулирование целей статьи

Целью этой работы является разработка методики построения многомерных аппроксимаций типа Паде для решения краевых задач и определение условий их сходимости. Таким образом, настоящее исследование направлено на решение приоритетной научной задачи – разработки новых методов расчета краевых задач математической физики и развития теории приближений функций многих переменных.

Принципиальным отличием работы является применение комбинации асимптотических методов решения краевых задач с обобщенным суммированием полученных рядов на основе многомерных аппроксимаций типа Паде, что позволят построить альтернативные к существующим численным методам схемы решения, превосходящие их по точности. Еще одним существенным отличием является комплексность проводимых исследований – от создания метода построения приближений, обоснования его сходимости, до имплементации его в схемы решения краевых задач и создания прикладных программ.

Изложение основного материала исследования

Выбор вида и схемы построение аппроксиманты типа Паде.

Рассмотрим сепарабельное метрическое гильбертово пространство $L_2[(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)]$ двумерных комплексных функций f(x,y) комплексных переменных x_1 и x_2 с квадратичной мерой на прямоугольнике $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$, интегрируемых на этом прямоугольнике. Границы прямоугольника могут быть конечными или бесконечными. В качестве базиса такого пространства может быть выбрано счетное множество функций B, являющихся прямым произведением множеств одномерных базисных функций $B_1=\{e_{1k}, k=\overline{1,\infty}\}$ и $B_2=\{e_{2j}, j=\overline{1,\infty}\}$ по отдельным координатам вида

$$B=\{e_{1k}e_{2j},\ k=\overline{1,\infty},\ j=\overline{1,\infty}\}. \quad (1)$$

В настоящей работе будем рассматривать одномерные базисные функции двух наиболее распространенных видов – степенные по соответствующей координате и тригонометрические (в комплексном представлении). Таким образом, базисные функции могут иметь вид

$$e_{nk}=(\exp(r+iq))^k=\exp(k(r+iq)), \quad (2)$$

где $x_n=\exp(r+iq)$ в случае степенных функций, $x_n=q$, $r=0$ в случае тригонометрических функций.

Из представления (2) следует, что разложение произвольной функции рассматриваемого пространства по базису в обоих случаях можно рассматривать как двумерный обобщенный степенной ряд вида

$$f=\sum_{k,p=1}^{\infty} a_{kp}(e_{11})^k(e_{21})^p. \quad (3)$$

Будем использовать для построения двумерного дробно-рационального приближения обобщенного ряда (3) подход, аналогичный предложенному для одномерных приближений типа Паде. Для этого введем понятие функционал вида Паде, связанного с заданным обобщенным степенным рядом.

Определение 1. Пусть задан двумерный степенной ряд

$$S=\sum_{k,p=1}^{\infty} a_{kp}(x_1)^k(x_2)^p$$

комплексных переменных x_1 и x_2 и связанная с ним аппроксиманта типа Паде $P[m_1, n_1/m_2,n_2](x_1,x_2)$ в смысле [15]. Функционалом вида Паде $GP_{GS}[m_1,n_1/m_2,n_2](f_1,f_2)$, связанным с заданным обобщенным степенным рядом

$$GS=\sum_{k,p=1}^{\infty} a_{kp}(f_1)^k(f_2)^p$$

от комплексных функций этих же переменных будем называть функционал вида

$$GP_{GS}[m_1,n_1/m_2,n_2](f_1,f_2)= \\ =P[m_1,n_1/m_2,n_2](x_1,x_2)\big|_{x_1=f_1,x_2=f_2}. \quad (4)$$

Это определение дает вид двумерной аппроксиманты типа Паде, отличный от использованных ранее [3], и имеющий преимущества для его конструктивного построения [15]. Использование аппроксиманты типа Паде в виде значения функционала вида Паде, связанного с заданным обобщенным степенным рядом (далее – функционала типа Паде), позволяет представить процесс построения ее для рассматриваемого пространства функций в виде следующей последовательности действий.

1. Выбирается вид базисов по отдельным переменным B_1, B_2 и базис пространства B.

2. Аппроксимируемая функция f представляется в виде (3).

3. Для степенного ряда двух комплексных переменных x_1 и x_2 с совпадающими с (3) коэффициентами производится построение аппроксиманты типа Паде $P[m_1,n_1/m_2,n_2](x_1,x_2)$ в смысле [15].

4. Производится подстановка базисных функций в функционал типа Паде.

Предложенная схема позволяет определить множество коэффициентов ряда, необходимое и достаточное для построения аппроксиманты типа Паде с заданной структурой числителя и знаменателя.

Определение условий сходимости двумерной аппроксиманты типа Паде.

В теории приближения функций дробно-рациональными аппроксимантами принято рассматривать сходимость в смысле теорем типа Монтессу де Болора [1], которые определяют эффективное аналитическое продолжение мероморфной функции за пределы радиуса сходимости степенного ряда. Авторы работ по Фурье-Паде аппроксимациям рассматривают в основном вопрос максимального касания тригонометрического многочлена гладкой функции с регулярно убывающими коэффициентами и аппроксиманты Фурье-Паде [3]. В этом случае о продолжении речь не идет – тригонометрическая функция является периодической и в комплексной форме всегда принадлежит единичному кругу. Кроме того, рассматриваются гладкие интегрируемые функции, что само по себе предполагает отсутствие особых точек типа полюса или существенно особых точек.

Второй подход не находит обоснования с точки зрения практического применения аппроксимант, поэтому в настоящей работе анализируется сходимость первого типа. Доказательство сходимости функционала типа Паде к значению самой функции в этом случае достаточно тривиально, поскольку функции e_{nk} не имеют особых точек (кроме бесконечно удаленной точки в случае степенных функций). Единственным ограничением оказывается случай, когда существенно особые точки по переменной, которая впоследствии заменяется тригонометрической функцией, лежат внутри единичного круга [3]. Поскольку в этом случае одномерный ряд, состоящий из коэффициентов a_{kp} (3), при суммировании по индексу этой переменной расходится, то определение этого случая не представляет труда. В таком случае необходимо использовать аппроксимацию на основе других базисных функций.

При оценке скорости сходимости двумерной аппроксиманты к приближаемой функции по коэффициентам используется величина скорости убывания коэффициентов исходного ряда [1,3]. В случае построения аппроксиманты типа Паде $P[m_1,n_1/m_2,n_2](x_1,x_2)$ по схеме [15], используются множества коэффициентов двумерного ряда, которые являются правильно пересчитываемыми при монотонном возрастании минимального из рассматриваемых показателей m_1,n_1,m_2 и n_2. На ограниченном прямоугольнике $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$ базисные функции обоих типов являются функциями ограниченной вариации, поэтому скорость убывания коэффициентов разложения (3) можно определить по методике [14].

Применение двумерных аппроксимаций для решения краевых задач

Двумерные аппроксимации могут быть эффективно применены для решения краевых задач на основе развития модифицированного метода продолжения по параметру (ММРС). Отличием метода является применение комбинации асимптотических методов решения краевых задач с обобщенным суммированием полученных рядов на основе многомерных аппроксимаций Паде-типа [15]. Исходное обыкновенное дифференциальное уравнение или система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть приведена к одному из видов – нормальной системе уравнений или системе уравнений связанных колебаний математических маятников. Введение малого параметра позволяет свести эти системы к решениям, являющимся разложением точного решения соответственно по степенным или тригонометрическим функциям. Для улучшения результатов счета для полученных двойных рядов целесообразно применить предложенную в настоящей статье методику.

Рассмотрим численный пример колебаний двух связанных осцилляторов. В общем случае уравнения колебаний в системе двух одинаковых связанных маятников имеют вид

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - \lambda x_2 = 0, \qquad (5)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 - \lambda x_1 = 0. \qquad (6)$$

Здесь x_1, x_2 – отклонения маятников от положения равновесия; ω – частота собственных колебаний маятников (парциальная частота); λ – коэффициент, определяющий величину связи между маятниками.

Общее решение системы (5), (6) имеет вид

$$x_1 = A\cos((\omega-\lambda)t+\psi_1)+ \\ +B\sin((\omega+\lambda)t+\psi_2); \qquad (7)$$

$$x_2 = A\cos((\omega-\lambda)t+\psi_1)- \\ -B\sin((\omega+\lambda)t+\psi_2), \qquad (8)$$

где амплитуды A, B и фазы ψ_1, ψ_2 определяются начальными условиями.

Для начального отклонения маятников на величины a и b с нулевой начальной скоростью получим для амплитуд выражения вида

$$A=0,5(a+b), \quad B=0,5(a-b); \qquad (9)$$

$y_1=y_2=0.$ (10)

Рассмотрим частный случай, когда, например, a#0, b=0. Тогда A=B=0,5a и точное решение имеет вид

$$x_1(t)=a\cdot\cos(\omega t)\cos(\lambda t); \quad (11)$$

$$x_2(t)=a\cdot\sin(\omega t)\sin(\lambda t). \quad (12)$$

Построим полиномиальную аппроксимацию решения системы (5)–(6) по схеме ММРС [15]. Введем в систему (5)–(6) искусственный малый параметр ε следующим образом

$$\ddot{x}_1=\varepsilon(\lambda x_2-\omega^2 x_1); \quad (13)$$

$$\ddot{x}_2=\varepsilon(\lambda x_1-\omega^2 x_2). \quad (14)$$

Решение будем искать в виде рядов

$$x_j=\sum_{i=0}^{\infty}x_{ij}\varepsilon^i,\ j=1,2. \quad (15)$$

Для ε^0 получим следующую предельную систему уравнений

$$\ddot{x}_{01}=\ddot{x}_{02}=0;$$

$$x_{01}=a,\quad x_{02}=0. \quad (16)$$

Для ε^1 получим

$$\ddot{x}_{11}=-\omega^2 a;$$

$$\ddot{x}_{12}=\lambda a;$$

$$x_{11}=-0,5\omega^2 at^2,\ x_{12}=0,5\lambda at^2, \quad (17)$$

для ε^2 – систему вида

$$\ddot{x}_{21}=0,5a(\omega^4+\lambda^2)\cdot t^2;$$

$$\ddot{x}_{22}=-a\omega^2\lambda\cdot t^2;$$

$$x_{21}=\frac{1}{24}a(\omega^4+\lambda^2)\cdot t^4,\ x_{22}=-\frac{1}{12}a\omega^2\lambda\cdot t^4, \quad (18)$$

а для ε^3 – систему вида

$$\ddot{x}_{31}=-\frac{a\omega^2}{24}(\omega^4+3\lambda^2)\cdot t^4;$$

$$\ddot{x}_{32}=\frac{a\lambda}{24}(3\omega^4+\lambda^2)\cdot t^4;$$

$$x_{31}=-\frac{a\omega^2}{6!}(\omega^4+3\lambda^2)\cdot t^6;$$

$$x_{32}=\frac{a\lambda}{6!}(3\omega^4+\lambda^2)\cdot t^6. \quad (19)$$

Введем замену переменной $x=t^2$ и получим приближение в виде двойных рядов

$$x_1\approx a-\frac{1}{2}\omega^2 a\varepsilon\xi+\frac{1}{24}a(\omega^4+\lambda^2)\varepsilon^2\xi^2-$$
$$-\frac{a\omega^2}{6!}(\omega^4+3\lambda^2)\varepsilon^3\xi^3=$$
$$=a(1-\frac{\omega^2}{2}\varepsilon\xi+\frac{1}{4!}(\omega^4+\lambda^2)\varepsilon^2\xi^2-$$
$$-\frac{\omega^2}{6!}(\omega^4+3\lambda^2)\varepsilon^3\xi^3); \quad (20)$$

$$x_2\approx\frac{1}{2}\lambda a\varepsilon\xi-\frac{1}{12}a\omega^2\lambda\varepsilon^2\xi^2+$$
$$+\frac{a\lambda}{6!}(3\omega^4+\lambda^2)\varepsilon^3\xi^3=$$
$$=\lambda a\varepsilon\xi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}\omega^2\varepsilon\xi+\frac{1}{6!}(3\omega^4+\lambda^2)\varepsilon^2\xi^2). \quad (21)$$

Таким образом, имеем два двойных степенных ряда в скобках, по которым построим двумерные приближения типа Паде. Построим таблицы коэффициентов имеющихся членов двойных рядов (табл. 1,2).

Для имеющегося набора коэффициентов возможно построение аппроксимант типа Паде вида

$$P_i[1,1/1,1](\varepsilon,\xi)=\frac{P_{00}^i+P_{10}^i\varepsilon+P_{01}^i\xi+P_{11}^i\varepsilon\xi}{1+Q_{10}^i\varepsilon+Q_{01}^i\xi+Q_{11}^l\varepsilon\xi}, \quad (22)$$

$i=1,2$

на основе выбора определяющего множества коэффициентов [15] вида

I(n; m)={(0;0); (1;0); (0;1); (1;1); (2;1); (1;2); (2;2)}. (23)

Таблица 1

Выражения для членов двойного ряда x_1

№ по ε	№ по ξ			
	0	1	2	3
0	2	0	0	0
1	0	$-\frac{1}{2}\omega^2$	0	0
2	0	0	$\frac{1}{4!}(\omega^4+\lambda^2)$	0
3	0	0	0	$-\frac{\omega^2}{6!}(\omega^4+3\lambda^2)$

Таблица 2

Выражения для членов двойного ряда x_2

№ по ε	№ по ξ		
	0	1	2
0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	$-\frac{1}{4!}\omega^2$	0
2	0	0	$\frac{1}{6!}(3\omega^4+\lambda^2)$

Индекс i=1 соответствует ряду (20), i=2 – (21).

Для определения коэффициентов знаменателя приближения для x_1 получим следующие системы уравнений

$$(1;2):\ 0=-\frac{1}{2}\omega^2 Q_{01}^1;$$

$$(2;1):\ 0=-\frac{1}{2}\omega^2 Q_{10}^1;$$

$$(2;2):\ 0=\frac{1}{4!}(\omega^4+\lambda^2)-\frac{1}{2}\omega^2 Q_{11}^1.$$

Следовательно

$$Q_{10}^1=Q_{01}^1=0, Q_{11}^1=\frac{\omega^4+\lambda^2}{12\omega^2}. \qquad (24)$$

Для x_2 получим

$$(1;2):\ 0=\frac{1}{2}Q_{01}^2;$$

$$(2;1):\ 0=\frac{1}{2}Q_{10}^2;$$

$$(2;2):\ 0=\frac{1}{6!}(3\omega^4+\lambda^2)-\frac{1}{4!}\omega^2 Q_{11}^1.$$

Следовательно

$$Q_{10}^2=Q_{01}^2=0, Q_{11}^2=\frac{3\omega^4+\lambda^2}{30\omega^2}. \qquad (25)$$

Коэффициенты числителя находятся подстановкой (24)–(25) в уравнения для оставшихся точек определяющего множества (23). Для x_1 получим

$$(0;0)\ P_{00}^1=2;$$

$$(1;0)\ P_{10}^1=0;$$

$$(0;1)\ P_{01}^1=0;$$

$$(1;1)\ P_{11}^1=-\frac{1}{2}\omega^2+2Q_{11}^1=-\frac{1}{2}\omega^2+$$
$$+\frac{\omega^4+\lambda^2}{6\omega^2}=\frac{\lambda^2-2\omega^4}{6\omega^2}, \qquad (26)$$

для x_2

$$(0;0)\ P_{00}^2=\frac{1}{2};$$

$$(1;0)\ P_{10}^2=0;$$

$$(0;1)\ P_{01}^2=0;$$

$$(1;1)\quad P_{11}^2=-\frac{1}{4!}\omega^2+\frac{1}{2}Q_{11}^2=-\frac{1}{4!}\omega^2+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{3\omega^4+\lambda^2}{30\omega^2}=\frac{\omega^4+2\lambda^2}{60\omega^2}. \qquad (27)$$

Таким образом, получим

$$x_1(\varepsilon,\xi)\approx a\frac{2+\frac{\lambda^2-2\omega^4}{6\omega^2}\varepsilon\xi}{1+\frac{3\omega^4+\lambda^2}{30\omega^2}\varepsilon\xi}=$$
$$=2a\frac{6\omega^2+(\lambda^2-2\omega^4)\varepsilon\xi}{12\omega^2+(\omega^4+\lambda^2)\varepsilon\xi}; \qquad (28)$$

$$x_2(\varepsilon,\xi) \approx \lambda a\varepsilon\xi \frac{\frac{1}{2} + \frac{\omega^4 + 2\lambda^2}{60\omega^2}\varepsilon\xi}{1 + \frac{\omega^4 + \lambda^2}{12\omega^2}\varepsilon\xi} =$$

$$= \frac{\lambda a}{5} \frac{30\omega^2 + (\omega^4 + 2\lambda^2)\varepsilon\xi}{12\omega^2 + (\omega^4 + \lambda^2)\varepsilon\xi}\varepsilon\xi. \quad (29)$$

В исходных переменных при ε=1 получим

$$x_1(t) \approx 2a \frac{6\omega^2 + (\lambda^2 - 2\omega^4)t^2}{12\omega^2 + (\omega^4 + \lambda^2)t^2}; \quad (30)$$

$$x_2(t) \approx \frac{\lambda a}{5} \frac{30\omega^2 + (\omega^4 + 2\lambda^2)t^2}{12\omega^2 + (\omega^4 + \lambda^2)t^2} t^2. \quad (31)$$

Рассмотрим другую схему введения малого параметра:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \varepsilon\lambda x_2; \quad (32)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \varepsilon\lambda x_1. \quad (33)$$

Решение также ищем в виде (15).

Для ε^0 получим следующую предельную систему уравнений

$$\ddot{x}_{01} + \omega^2 x_{01} = 0;$$

$$\ddot{x}_{02} + \omega^2 x_{02} = 0;$$

$$x_{01} = a\cdot\cos(\omega t), \quad x_{02} = 0. \quad (34)$$

Для ε^1 получим

$$\ddot{x}_{11} + \omega^2 x_{11} = 0;$$

$$\ddot{x}_{12} + \omega^2 x_{12} = a\lambda\cdot\cos(\omega t);$$

$$x_{11} = 0, x_{12} = -\frac{a\lambda}{2\omega}\cdot t\cdot\sin(\omega t). \quad (35)$$

Для ε^2 – систему вида

$$\ddot{x}_{21} + \omega^2 x_{21} = -\frac{a\lambda}{2\omega}\cdot t\cdot\sin(\omega t);$$

$$\ddot{x}_{22} + \omega^2 x_{22} = 0;$$

$$x_{21} = \frac{a\lambda^2}{8\omega^2}\cdot t^2\cdot\cos(\omega t) - \frac{a\lambda^2}{8\omega^3}\cdot t\cdot\sin(\omega t), x_{02} = 0. \quad (36)$$

Для ε^3 – систему вида

$$\ddot{x}_{31} + \omega^2 x_{31} = 0;$$

$$\ddot{x}_{32} + \omega^2 x_{32} = \frac{a\lambda^3}{8\omega^2}\cdot t^2\cdot\cos(\omega t) - \frac{a\lambda^3}{8\omega^3}\cdot t\cdot\sin(\omega t);$$

$$x_{31} = 0, x_{32} = \frac{a\lambda^3}{16\omega^3}\cdot t^2\cdot\cos(\omega t) + \left(\frac{a\lambda^3}{48\omega^3}\cdot t^3 - \frac{a\lambda^3}{16\omega^4}\cdot t\right)\cdot\sin(\omega t). \quad (37)$$

Получим приближение в виде двойных рядов

$$x_1 \approx a\cdot\cos(\omega t) + \frac{a\lambda^2}{8\omega^3}(\omega\cdot t^2\cdot\cos(\omega t) - t\cdot\sin(\omega t))\cdot\varepsilon^2; \quad (38)$$

$$x_2 \approx \varepsilon t\left[-\frac{a\lambda}{2\omega}\sin(\omega t) + \frac{a\lambda^3}{48\omega^4}(3\omega t\cdot\cos(\omega t) + (\omega t^2 - 3)\sin(\omega t))\cdot\varepsilon^2\right]. \quad (39)$$

Разложим секулярные члены в ряды по тригонометрическим функциям на участке $\left(-\pi/\omega, \pi/\omega\right)$ и возьмем отрезок из первых членов:

$$\omega\cdot t^2\cdot\cos(\omega t) - t\cdot\sin(\omega t) \approx$$

$$\approx -\frac{6}{\omega} + \frac{\pi^2 + 3}{3\omega}\cos(\omega t) - \frac{7}{9\omega}\cos(2\omega t);$$

$$3\omega t\cdot\cos(\omega t) + \omega t^2\cdot\sin(\omega t) =$$

$$= -\frac{27\omega - 2\pi^2 + 3}{6\omega}\sin(k\omega t) + 2\frac{9\omega - 4}{9\omega}\sin(2k\omega t).$$

Получим следующие выражения, содержащие отрезки двойных рядов

$$x_1 \approx a \cdot \left(\begin{array}{l} \cos(\omega t) - \dfrac{3\lambda^2}{4\omega^4}\varepsilon^2 + \\ + \dfrac{\lambda^2(\pi^2+3)}{24\omega^4}\varepsilon^2 \cos(\omega t) - \\ - \dfrac{7\lambda^2}{72\omega^4}\varepsilon^2 \cos(2\omega t) \end{array} \right); \qquad (40)$$

$$x_2 \approx -\frac{a\lambda}{2\omega}\varepsilon t \cdot \left(\begin{array}{l} \sin(\omega t) - \\ - \dfrac{\lambda^2(27\omega - 2\pi^2 + 3)}{144\omega^4}\varepsilon^2 \sin(\omega t) + \\ + \dfrac{\lambda^2(9\omega - 4)}{108\omega^4}\varepsilon^2 \sin(\omega t) \end{array} \right). \qquad (41)$$

Рассмотрим комплексные величины

$$X_1 = e^{i\omega t} - \frac{3\lambda^2}{4\omega^4}\varepsilon^2 + \frac{\lambda^2(\pi^2+3)}{24\omega^4}\varepsilon^2 e^{i\omega t} - \frac{7\lambda^2}{72\omega^4}\varepsilon^2 e^{2i\omega t}; \qquad (42)$$

$$X_2 = e^{i\omega t} - \frac{\lambda^2(27\omega - 2\pi^2 + 3)}{144\omega^4}\varepsilon^2 e^{i\omega t} + \frac{\lambda^2(9\omega - 4)}{108\omega^4}\varepsilon^2 e^{2i\omega t}, \qquad (43)$$

связанные с аппроксимируемыми функциями зависимостями

$$x_1 = a\,\mathrm{Re}(X_1); \qquad (44)$$

$$x_2 = -a\frac{\lambda t}{2\omega}\varepsilon\,\mathrm{Im}(X_2). \qquad (45)$$

Построим таблицу коэффициентов членов двойных рядов (42), (43) (табл. 3,4).

Для имеющегося набора коэффициентов можно построить функционалы типа Паде вида

$$GP_j[1,1/1,1](\varepsilon, fj) = \frac{P_{00}^j + P_{10}^j\varepsilon^2 + P_{01}^j e^{i\omega t} + P_{11}^j \varepsilon^2 e^{i\omega t}}{1 + Q_{10}^j\varepsilon^2 + Q_{01}^j e^{i\omega t} + Q_{11}^j\varepsilon^2 e^{i\omega t}}, \qquad (46)$$

$$j = 1, 2,$$

на основе определяющего множества коэффициентов вида

I(n; m)={(0;0); (1;0); (0;1); (1;1); (2;1); (1;2); (2;2)}. (47)

Таблица 3

Выражения для членов двойного ряда X_1

№ по ε^2	№ по $e^{i\omega t}$		
	0	1	2
0	0	1	0
1	$-\dfrac{3\lambda^2}{4\omega^4}$	$\dfrac{\lambda^2(\pi^2+3)}{24\omega^4}$	$-\dfrac{7\lambda^2}{72\omega^4}$

Таблица 4

Выражения для членов двойного ряда X_2

№ по ε^2	№ по $e^{i\omega t}$		
	0	1	2
0	0	1	0
1	0	$-\dfrac{\lambda^2(27\omega-2\pi^2 3)}{144\omega^4}$	$\dfrac{\lambda^2(9\omega-4)}{108\omega^4}$

Для определения коэффициентов знаменателя приближения для (42) получим следующие системы уравнений

$$(1;2):\ 0 = -\frac{7\lambda^2}{72\omega^4} + \frac{\lambda^2(\pi^2+3)}{24\omega^4}Q_{01}^1;$$

$$(2;1):\ 0 = \frac{\lambda^2(\pi^2+3)}{24\omega^4}Q_{10}^1;$$

$$(2;2):\ 0 = \frac{\lambda^2(\pi^2+3)}{24\omega^4}Q_{11}^1.$$

Следовательно

$$Q_{10}^1 = Q_{11}^1 = 0, Q_{01}^1 = \frac{3}{7(\pi^2+3)}. \qquad (48)$$

Коэффициенты числителя находятся подстановкой (48) в уравнения для оставшихся точек определяющего множества (47). Для (42) получим

$$(0;0)\ P_{00}^1 = 0;$$

$$(1;0)\ P_{10}^1 = -\frac{3\lambda^2}{4\omega^4};$$

$$(0;1)\ P_{01}^1 = 1;$$

$$(1;1)\ \ P_{11}^{1}=\frac{\lambda^2(\pi^2+3)}{24\omega^4}. \qquad (49)$$

Таким образом, получим

$$X_1(\varepsilon,t)\approx a\frac{-\dfrac{3\lambda^2}{4\omega^4}\varepsilon^2+e^{i\omega t}+\dfrac{\lambda^2(\pi^2+3)}{24\omega^4}\varepsilon^2 e^{i\omega t}}{1+\dfrac{3}{7(\pi^2+3)}e^{i\omega t}}. \qquad (50)$$

Для расчета (45) проводятся аналогичные действия, которые не приведены в статье в силу их подобия.

Численное сравнение результатов расчетов, например x_1 (рис. 1) при ω=4 и λ=0,5 по формулам (20) (штриховая линия) и (28) (пунктир) показывает преимущество последней формулы на половине периода при приближении точного результата (сплошная линия).

Численное сравнение результатов расчетов, например x_1 (рис. 2) при ω=4 и λ=0,5 по формулам (40) (штриховая линия) и (50) (пунктир) показывает хорошее согласование с точным результатом (сплошная линия) уже на периоде.

Выводы

Предложен способ построения многомерных дробно-рациональных приближений для различных видов базисных функций и определение множества коэффициентов ряда, необходимого для построения приближения заданной

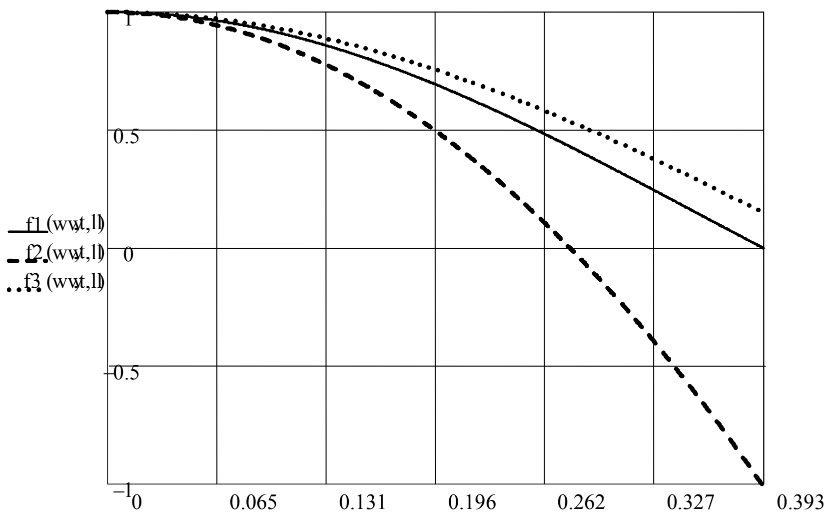

Рис. 1. Сравнение результатов полиномиальной аппроксимации

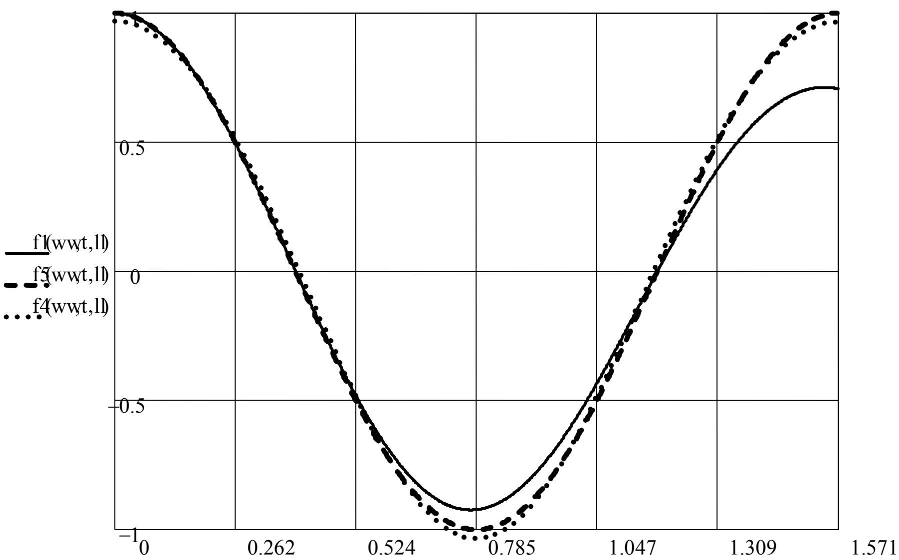

Рис. 2. Сравнение результатов тригонометрической аппроксимации

структуры. Определены условия сходимости аппроксимант приближаемых многомерных функций, построенных по разработанной методике, при различных базисных функциях. Предложено развитие модифицированного метода продолжения по параметру (ММРС) на основе полученных результатов. Предложенная методика применяет комбинацию асимптотических методов решения краевых задач с обобщенным суммированием полученных рядов на основе многомерных аппроксимаций Паде-типа, что позволяет строить альтернативные к существующим численным методам схемы решения, не уступающие им по точности. Создан метод построения приближений, обосновано его сходимость, показан способ его имплементации в схемы решения краевых задач. Получены практические расчеты примера колебания системы связанных маятников, рассчитанные с помощью предложенного метода на основе прикладных программ. Продемонстрирована работоспособность метода и возможность за счет его применения повышения точности расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. // пер. с англ. Е.А. Рахманова, С.П. Суетина; ред. А.А. Гончар. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

2. *Гончар А.А., Рахманов Е.А., Суетин С.П.* Аппроксимации Паде-Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов // УМН. – 2011. – Т.66. – № 6(402). – С.3-36.

3. *Лабыч Ю.А., Старовойтов А.П.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье // Матем. сб. – 2009. – Т.200. – № 7. – С.107-130.

4. *Buslaev V.I., Suetin S.P.* On the existence of compact of minimal capacity in the theory of rational approximation of multi-valued analytic functions // Journal of Approximation Theory. – 2016. – Vol.206. – P.48-67.

5. *Sablonniere P.* Pade-Type Approximants for Multivariate Series of Functions // Numerical Algorithms. – 2014. – Vol.66. – P.339-347.

6. *Kida S.*, Pade-type and Pade approximants in several variables // Appl. Numer. Math. – 1990. – Vol.6. – P.371-391.

7. *Daras N.J.* The convergence of Pade-type approximants to holomorphic functions of sever // al complex variables // Appl. Numer. Math. – 1990. – Vol.6. – P.341-360.

8. *Дьяченко М.И.* Двумерные классы Ватермана и u-сходимость рядов Фурье. Матем. сборник. – 1999. – Т. 190 (7). – С.23-40.

9. *Бахвалов А.Н.* О сходимости и локализации кратных рядов Фурье для классов функций ограниченной Л-вариации // Вестн. Моск. Ун-та. – 2008. – Сер.1: Мат., Мех. – № 3. – С.6-12

10. *Stout E.L.* Holomorphic approximation on compact, holomorphically convex, real analytic varieties // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006, – P.42-50.

11. *Levenberg N.* Approximation in C^N // Surveys in Approximation Theory – 2006. – Vol.2. – P.92-140.

12. *Huzoor H. Khan, Rifaqat Ali.* On the Growth of Entire Functions of Several Complex Variables // Int. Journal of Math. Analysis. – 2011. – Vol.5. – № 43. – P.2141-2146.

13. *Колодяжный В.М., Лисина О.Ю.* Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов // Пробл. Машиностроения – 2010. – Т.13. – № 3. – С.67-74.

14. *Олевская Ю.Б.* О соотношении некоторых систем суммирования кратных рядов Фурье // Пути современной математики: образование, наука, индустрия: материалы конф. – Д.: НГУ. – 2013. – С.26-32.

15. *Andrianov I.V.* Analytical perturbation method for calculation of shells based on 2-D Pade approximants // International Journal of Structural Stability and Dynamics – 2013. – Vol.13 – № 7. – P.1-7.

Поступила в редакцию 07.04.18

ПИТАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ТИПУ ПАДЕ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Олевський В.І., Олевська Ю.Б., Науменко Т.С., Шапка І.В.

Мета цієї роботи є розробка методики побудови багатовимірних апроксимацій типу Паде для розв'язку крайових задач і визначення умов їх збіжності. У теорії багатовимірних дрібно-раціональних апроксимацій функцій виділяються два проблемні аспекти. По-перше, це визначення самого поняття таких апроксимацій і способу побудови наближення, а по-друге, вибір класу наближених функцій і доказ збіжності обраної схеми. Пропонується розвиток теорії багатовимірних дрібно-раціональних наближень для апроксимації степеневих рядів, заданих на деяких системах базисних функцій. Підбір виду базисних функцій і методу побудови наближення дозволяє в низці випадків домогтися істотного поліпшення корисних властивостей апроксиманти для деяких виділених класів функцій. Розглядається створення способу побудови таких багатовимірних дрібно-раціональних наближень і визначення безлічі коефіцієнтів ряду, необхідних для побудови наближення заданої структури. Визначені умови збіжності апроксимант наближених багатовимірних функцій, побудованих за розробленою авторами методикою, при різних базисних функціях. Запропоновано розвиток модифікованого методу продовження по параметру на основі отриманих результатів. Відмінністю запропонованої методики є застосування комбінації асимптотичних методів вирішення крайових задач з узагальненим підсумовуванням отриманих рядів на основі багатовимірних апроксимацій Паде-типу, що дозволять побудувати альтернативні до існуючих чисельних методів схеми розв'язків, які не поступаються їм за точністю. Ще однією істотною відмінністю є комплексність досліджень – від створення методу побудови наближень, обґрунтування його збіжності, до імплементації його в схеми розв'язання крайових задач і створення прикладних програм.

Таким чином, робота спрямована на розробку нових методів розрахунку крайових задач математичної фізики і розвитку теорії наближень функцій багатьох змінних.

Ключові слова: багатовимірна апроксимація Паде, ряд Фур'є, крайова задача, функції декількох змінних, збіжність.

QUESTIONS OF USING MULTIDIMENSIONAL PADE-TYPE APPROXIMATIONS FOR THE GENERALIZED SUMMARY OF THE DECISIONS OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

Olevsky V.I. [a], Olevskaya Yu.B. [b], Naumenko T.S. [a], Shapka I.V. [a]

[a] **Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro, Ukraine**

[b] **Dnieper Polytechnic, Dnipro, Ukraine**

The aim of this work is to develop a methodology for constructing multidimensional Pade approximants for solving boundary value problems and determining the conditions for their convergence. In the theory of multidimensional fractional-rational function approximations, two problem aspects are distinguished. First, it is the definition of the very concept of such approximations and the method of constructing the approximation, and secondly, the choice of the class of approximable functions and the proof of the convergence of the chosen scheme. We propose the development of the theory of multidimensional fractional-rational approximations for the approximation of power series defined on certain systems of basis functions. The choice of the form of the basis functions and the method of constructing the approximation makes it possible in a number of cases to achieve a substantial improvement in the useful properties of approximants for certain distinguished classes of functions. We consider the creation of a method for constructing such multidimensional fractional-rational approximations and determining the set of coefficients of the series necessary for constructing an approximation of a given structure. Conditions for the convergence of approximants of approximate multidimensional functions constructed according to the method developed by the authors are determined for various basic functions. The development of a modified method of continuation by the parameter based on the results obtained is proposed. The difference between the proposed method is the use of a combination of asymptotic methods for solving boundary value problems with a generalized summation of the obtained series on the basis of multidimensional Padй-type approximations, which will allow constructing alternative solutions to existing numerical methods that are not inferior in accuracy. Another important difference is the complexity of the research – from the creation of the method of constructing approximations, the justification of its convergence, to its implementation in the solution of boundary value problems and the creation of application programs. Thus, the present work is aimed at developing new methods for calculating the boundary value problems of mathematical physics and developing the theory of approximation of functions of several variables.

Keywords: multidimensional Pade approximant, Fourier series, boundary value problem, functions of several variables, convergence.

REFERENCES

1. George A. Baker, Jr., Peter Graves-Morris. *Approksimacii Pade.*[Pade approximants]. Trans. with English Rakhmanova E.A., Suetina S.P.; Ed. A.A. Gonchar. Moscow: Mir, 1986, 502 p. *(in Russian).*

2 Gonchar A.A., Rahmanov E.A., Suetin S.P. Approksimacii Pade-Chebyshjova dlja mnogoznachnyh analiticheskih funkcij, variacija ravnovesnoj jenergii i S-svojstvo stacionarnyh kompaktov.[Pade-Chebyshev approximations for multivalued analytic functions, variation of equilibrium energy, and the S-property of stationary compacta]. *UMN*, 2011, Vol. 66, № 6 (402), pp.3-36. *(in Russian).*

3. Labych Ju.A., Starovojtov A.P. Trigonometricheskie approksimacii Pade funkcij s reguljarno ubyvajushhimi kojefficientami Fur'e. [Trigonometric Pade approximants for functions with regularly decreasing Fourier coefficients.]. *Matem. sb.*, 2009, Vol. 200, № 7, pp.107-130. *(in Russian).*

4. Buslaev V.I., Suetin S.P. On the existence of compact of minimal capacity in the theory of rational approximation of multi-valued analytic functions. *Journal of Approximation Theory*, 2016, No. 206, pp.48-67.

5. Sablonniere P. Pade-Type Approximants for Multivariate Series of Functions. *Numerical Algorithms*, 2014, No. 66, pp.339-347.

6. Kida S. Pade-type and Pade approximants in several variables. *Appl. Numer. Math.*, 1990, Vol. 6, pp.371-391.

7. Daras N.J. The convergence of Pade-type approximants to holomorphic functions of several complex variables. *Appl. Numer. Math.*, 1990, Vol. 6, pp.341-360.

8. Djachenko M.I. Dvumernye klassy Vatermana i u-shodimost rjadov Furye [Two-dimensional Waterman classes and u-convergence of Fourier series]. *Matem. sbornik.*,1999, Vol. 190 (7), pp.23-40. *(in Russian).*

9. Bahvalov A.N. O shodimosti i lokalizacii kratnyh rjadov Furye dlja klassov funkcij ogranichennoj Л-variacii [On the convergence and localization of multiple Fourier series for classes of functions of bounded Л-variation.]. *Vestn. Mosk. Un-ta.*, 2008, Ser. 1: Mat., Meh., № 3, pp.6-12. *(in Russian).*

10. Stout E.L. Holomorphic approximation on compact, holomorphically convex, real analytic varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2006, pp.42-50.

11. Levenberg N. Approximation in C^N. *Surveys in Approximation Theory*, 2006, Vol. 2, pp.92-140.

12. Huzoor H. Khan, Rifaqat Ali. On the Growth of Entire Functions of Several Complex Variables. *Int. Journal of Math. Analysis*, 2011, Vol. 5, No. 43, pp.2141-2146.

13. Kolodjazhnyj V.M., Lisina O.Ju. Bessetochnye metody v zadachah modelirovanija fizicheskih processov [Gridless methods in problems of modeling of physical processes.]. *Probl. Mashinostroenija*, 2010, Vol. 13, № 3, pp.67-74. *(in Russian).*

14. Olevskaja Ju.B. O sootnoshenii nekotoryh sistem summirovanija kratnyh rjadov Fuye. .[On the relation of certain systems of summation of multiple Fourier series.]. *Puti sovremennoj matematiki: obrazovanie, nauka, industrija: materialy konf.* Dnepropetrovsk, NGU, 2013, pp.26-32. *(in Russian).*

15. Andrianov I.V. Analytical perturbation method for calculation of shells based on 2-D Pade approximants. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2013, Vol. 13, № 7, pp.1-7.